



2019年
No.129

巻 頭 言

手は丁寧に確実に、足は一步一步、しかし目は遠くを見る。手は雑で乱暴、足はよろよろ、目は虚ろ、とならぬ様！今年度も入門から中級まで 10 講座を開講します。数学の世界とより良い関係を築く皆様の努力を多少ともサポートいたします。

調べごとがあつて数学工房が S 社から独立したころから駒込移転の辺り会報のバックナンバーを読み返してみました。この頃の会報を見ると新しい考え方に基づいた数学の稽古の場を創り出すのだという澆刺とした気に満ちて、会員達の間にも数学を通じて自分たちの学びの共同体を作るのだという熱気のようなものが溢れていました。いつのまにか、日々の仕事に紛れて、この頃のことを思い出すこともなくなっていました。久し振りで数学工房の初心というべきものを思い出しました。この時期に入会された会員がいまだに数学工房の中核であるのは、偶然ではない気がします。

他所の幾つかの社会人の数学愛好者向け講座に顔を出している会員の観察では、数学工房の会員は一般の愛好者とは対蹠的に難しい内容のコースを選ぶ傾向があるそうです。レベルの高い内容の数学に挑みたいという志は、是非とも大切にしてください。とは言ふものの、意欲は良いのですが、下手をすれば、手は雑で乱暴、足はよろよろ、目は虚ろなどということになりかねません。バランスの良い基礎体力を養ってください。

初級レベルでの困難は、多分純朴な数学から抽象的な数学に移行する時に起きる学部レベルの数学の専門教育における一般的困難に属します。ここでは、抽象位相、代数のような基礎数学は一通り習得してしまった、中級レベルの困難を考えてみましょう。このレベルで起きる問題は、抽象を方法として具体的に使いこなすことに伴う困難で、代数、位相、解析の個別の知識の欠如というより対象の取り扱いの方法を支える視点或いは哲学の初等的な段階からの転換が難しいのかなと思います。

例えば、可換代数でいえば、イデアルや対応する準同型等の一応なことを知っていても、素イデアルの空間上の関数と考えるという自然なアイデアが分かりにくいのは、関数のクラスを関数環ととらえる見直しの経験がないからでしょう。複素関数論などはこの手の見方の訓練の宝庫なのですが。別の例を挙げると C^* 代数では、直接いじるのが困難な非可換な世界に実解析学を展開したいわけです。とすれば何としても満足のいく位相的測度論を作らなければならない、その際に頼りになるのは、積分がコンパクト Hausdorff 空間上の連続関数環の正の線形形式として特徴づけられている (Riesz - Kakutani の定理) ことです。そこで積分を正の線形形式を用いて定義するわけです。そのために先ず正の概念や正の線形形式の構造の研究を詳しく調べるわけです。また局所的に表現定理によって通常の解析学の結果が用いられ詳しい解析ができます。これなども積分を線形代数でとらえなおしたことがあればごく自然なことと思えるでしょう。

そのうえ、いわゆる現代数学と呼ばれる数学の特徴は概念そのものが代数的な表現で記述され、概念そのものも計算や変形の対象になり、古典的な計算の概念が大幅に拡張されています。また表現論を用いてより構造の豊富な自然な対象との間を自由に行き来する感覚が要求されます。古典論で特定の面白い関数を展開したり、評価したりするのはちょっと趣が違います。(無論これはこれで、面白く重要で、必ずしも易しくありませんが、何をしているかはわかりやすい!) かなり出来る方でも C^* 代数や Von Neumann 代数のような数学が学びにくい理由の一つは、恐らく解析学の捉え方の感覚が古典的な段階で止まっているからです。一つ手前の対策として有用なのは発展的な視点を意識して、例えば複素関数論を通して解析学や代数、位相の学びなおしをすることだと思います。その際、漫然と知識の表面をさらうのは無意味です。昔学んだ時より豊かな数学的な経験があるのですから、楽しみつつ手は丁寧に確実に、足は一步一步、しかし目は遠くを望んでください。

数学工房の教程は基本的には、微積分、線形代数、代数等の既修者を対象にして、古典的な段階からよりソフィケートされた段階への移行を緩やかにするようになっていきます。上手にご利用ください。

数学工房 桑野耕一 2019年 6月

夏学期講座案内

2019年

5月～8月

夏学期スケジュール

入門

◆ IA 解析教程 I - 数直線のとらえ方

数直線は全解析学の最も根源的な建築素材です。古典的な対象の捉え方からよりソフィケートされた立場への移行を意識した教程です。

- <1> 数直線概念
- <2> 数列と数列の収束
- <3> 数直線の完備性

(隔週土曜 3回 14:00-18:00)

7/13、7/27、8/10

◆ ID 多変数の微積分と初等線形代数 (改訂版) I - Euclid 空間とその上の線形代数

多次元空間の概念は19世紀の初めに多変数の微積分の直感的な描像としてあらわれ、その後100年かけて解析学の対称が働く場としての抽象空間へと発展したのである。線形代数はこの幾何学の代数化として20世紀になり発展整備されたのです。今回の版は、サイズの関係で多次元空間の部分を大幅に削って、標準的な線形代数と、多変数の微積分の取り扱いの例を強化した。その分独創性が薄れて標準的な教程に近づいたといえる。

- <0> 数空間
- <1> 線形代数の基本概念から
- <2> 内積・直交性
- <3> 線形写像
- <4> 線形形式と双対空間

秋学期 体積形式と行列式 連続ベクトル場
写像の微分法 連続関数の積分に続く

(変則土曜 3回 14:00-18:00)

5/18、6/1、6/22

入門・初級

◆ IE 微分方程式概論 - 存在定理、線型微分方程式

微分方程式は、状況に応じ色々な形の流れの中で取り上げてきたが定数係数の場合を

除いて体系的に取り上げたことはありませんでした。一つは個別の一階二階の微分方程式は、数学工房の会員はよく知ってていようことであらうとありました。そこで自分自身のまとめとして取り上げることにしました。今述べた理由から個別の微分方程式の古典的な解法から始める王道をとりませんでした。

- <1> 存在定理
- <2> 線型微分方程式
 - (1) 定数係数の斉次微分方程式
 - (2) 線型微分方程式の一般解
 - (3) 特殊解を求めるいくつかの方法
- <3> 古典的な種々の方程式

(変則日曜 6回 11:00-13:00)

5/26、6/16、6/30、7/14、7/28、8/11

初級

◆ IF 数学の基本語彙と文法 III (特別講座) - 同値類、商空間

初級以上の教程に進まれる前に I、II とともに必ず学んでおいて欲しい内容です。本格的に数学を始める前に、漫然ととらえていた数学的対象をはっきりと捕まえる必要があるのです。例えば2つのものが等しいとは何か？それに対する解答が同値関係で与えられます。概念をはっきりさせることによって新しい数学的対象を作る普遍的な方法が見いだされます。数学工房の教程は大学の前半で学ぶ数学の基本を、単に知識としてだけでなく意識的に数学語の使い方演習をしながら理解しなおすことを狙っています。(隔週土曜 2回 13:00-18:00)

7/6、7/20

初級

◆ G 内積空間上の対称作用素のクラスと2次形式

今回の内容は、本来関数解析から始まった内容で、のちに線形代数化されたものです。諸領域の応用解析に登場する最も重要な道具です。

- <0> 準備
- <1> 双線型形式の表現定理と2次形式
- <2> 2次形式の最大原理と対称変換の固有値
- <3> 正射影と単位の分解

<4> スペクトル定理とその帰結
<5> 関数算法
<6> Schatten 展開と特異値、特異ベクトル
(変則日曜 6 回 11:00–13:00)
5/19、6/2、6/23、7/7、7/21、8/4

初級・中級

◆ IC 群の表現 -Unitary 表現 II

前回までで、位相群の可測集合に対する作用、関数に対する作用、不変測度について論じました。今回はコンパクト作用素の基本的な性質から始めて、Peter-Weyl の定理を目標にします。

<1> 関数解析からの準備
<2> Hilbert 空間上のコンパクト作用素
<3> コンパクト群の Unitary 表現の分解
<4> Schur の定理と行列成分の直交関係
<5> Peter-Weyl の定理

(変則土曜 3 回 14:00–18:00)
5/25、6/15、6/29

◆ EC 多様体の基礎理論 IV -Riemann 多様体 テンソルと微分形式

多様体上のテンソル場、外微分形式の狙いは、多様体上の高階微分の構造と可積分条件を確立することです。テンソル場には、共変テンソル場、反変テンソル場、混合テンソル場がありますが、問題の性質上もっぱら共変ベクトル場を扱うこととなります。

<0> 一般的なテンソル積
<1> 代数的なテンソルの理論まとめ
<2> 多様体上のテンソル場と微分形式
<3> テンソル場の Lie 微分と微分形式の外微分

(隔週日曜 3 回 14:00–18:00)
7/14、7/28、8/11

中級

◆ MA C^* 代数の Gelfand の表現定理と連続関数算法、Borel 関数算法 I

作用素論や非可換解析の先端へ進むにあたっての、最も強力な基礎的な道具として欠かせない、 C^* 代数の基本概念と Gelfand の表現定理、その応用として連続関数算法、Borel 関数算法をとりあげます。

<1> C^* 代数の概略
<2> C^* 代数の Gelfand の表現定理
<3> スペクトル測度
<4> 連続関数算法
<5> Borel 関数算法

(変則日曜 3 回 14:00–18:00)
5/19、6/2、6/23

◆ MB Von Neumann Algebras V -可換 Von Neumann 代数と測度空間への表現

可分な Hilbert 空間上の可換 Von Neumann 代数は、指標空間上にある Radon 測度が定まりその上の本質的に有界な関数たちの作る Banach 環へと表現されます。このことが、 C^* 代数が連続関数環の非可換化で Von Neumann 代数が可測関数の非可換化の研究とみなされる理由なのです。この章が終わると再び C^* 代数の表現論に戻ります。

<0> 一般位相からの補充
<1> 可換 Von Neumann 代数とその標準表現
<2> C^* 代数の表現論その 2
(1) 既約表現と純粋状態についてのまとめ
(2) Kadison の定理とその帰結
(3) C^* 代数の左イデアルと純粋状態

(変則日曜 3 回 14:00–18:00)
5/26、6/16、6/30

◆ MC Sobolev 空間 I

雑に言って、 C^∞ 級のカテゴリの代わりに測度論的な枠組みに対象を広げて、微分形式を研究しようということです。 L_p 空間の中にある階数までの超関数微分で閉じた部分空間を Sobolev 空間といいます。

<0> 準備
<1> Sobolev 空間の定義と基本的な性質
<2> 一般 Sobolev 空間
<3> トレース作用素

(隔週日曜 3 回 14:00–18:00)
7/7、7/21、8/4

講座料について

各講座、税込 ¥32,000(学割 ¥25,000) です。途中参加の場合、
・3 回講座は、1、2 回目 ¥12,000(学割 ¥9,000)、3 回目 ¥10,000(学割 ¥9,000) です。
・6 回講座は、1 回目 ¥6,500(学割 ¥6,000)、2 回目以降 ¥5,500/回(学割 ¥4,000/回) です。
特別講座 講座料 ¥30,000

講座、研究会等に御参加いただくには該当年度の数学工房の年会費がお払込み済みであることが必要です。

・銀行口座: 三井住友銀行 清瀬支店 普通預金
口座番号 4585253 数学工房 桑野耕一
・郵便振替: 00150-9-686515 数学工房



入門 桑野道場 (第40回)

//記 桑野道場師範代 半田伊久太//



前回の問題

1. V : 体 K 上の有限次元線型空間, $\dim V = n$ とする.
 U を V の線型部分空間, $U^\circ := \{\varphi \in V^* \mid U \subset \text{Ker}\varphi\}$ とおく.
 このとき U° は V^* の線型部分空間で, $\dim U^\circ = n - \dim U$ であることを示せ.
 ここで V^* は V の双対空間, すなわち $V^* = \{\varphi: V \rightarrow K \mid \varphi \text{ は } K\text{-線型}\}$.
2. V, W : 体 K 上の有限次元線型空間, $\dim V = n, \dim W = m$ とする.
 $T: V \rightarrow W$ を K -線型写像とすると, $T^*: W^* \ni \eta \mapsto \eta \circ T \in V^*$ で T^* を定義する. このとき次を示せ.
 - (a) T^* は K -線型. (T^* を algebraic adjoint と呼ぶ)
 - (b) $\text{Ker}T^* = (\text{Im}T)^\circ$ かつ $\text{Im}T^* = (\text{Ker}T)^\circ$.
 - (c) \mathcal{A} を V の基底, \mathcal{B} を W の基底, \mathcal{A}^* を \mathcal{A} の双対基底, \mathcal{B}^* を \mathcal{B} の双対基底とする. 基底 \mathcal{A}, \mathcal{B} による T の行列表示を $[T]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$, 双対基底 $\mathcal{B}^*, \mathcal{A}^*$ による T^* の行列表示を $[T^*]_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{A}^*}$ と表すと, $[T^*]_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{A}^*} = {}^t([T]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}})$ が成立する. ただし行列 A に対して tA は A の転置行列を表す.

解答

1.
 - U° は V^* の線型部分空間であること
 $\mathbf{0}^*$ を V^* の零元とすると $V = \text{Ker}\mathbf{0}^* \supset U$ より $\mathbf{0}^* \in U^\circ$. よって $U^\circ \neq \emptyset$.
 $\alpha_1, \alpha_2 \in K, \phi_1, \phi_2 \in U^\circ, u \in U$ に対して $(\alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2)(u) = \alpha_1\phi_1(u) + \alpha_2\phi_2(u) = \mathbf{0}$. よって $u \in \text{Ker}(\alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2)$. したがって $U \subset \text{Ker}(\alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2)$. ゆえに $\alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2 \in U^\circ$. 以上により U° は V^* の線型部分空間.
 - $\dim U^\circ = n - \dim U$ であること
 U の基底を $\{a_1, \dots, a_r\}, \{a_{r+1}, \dots, a_n\}$ を含む V の基底を $\{a_1, \dots, a_r, a_{r+1}, \dots, a_n\}$ とする. さらに $\{a_1, \dots, a_n\}$ の双対基底を $\{a_1^*, \dots, a_n^*\}$ とする.
 $a_j (1 \leq j \leq r)$ と $a_k^* (r+1 \leq k \leq n)$ に対して $a_k^*(a_j) = 0$.
 したがって $U = \text{Span}(a_1, \dots, a_r) \subset \text{Ker} a_k^* (r+1 \leq k \leq n)$.
 よって $a_k^* \in U^\circ$. すなわち $\text{Span}(a_{r+1}^*, \dots, a_n^*) \subset U^\circ$.
 ゆえに $V^* = \text{Span}(a_1^*, \dots, a_r^*) \oplus \text{Span}(a_{r+1}^*, \dots, a_n^*) \subset \text{Span}(a_1^*, \dots, a_r^*) \oplus U^\circ \subset V^*$. したがって $U^\circ = \text{Span}(a_{r+1}^*, \dots, a_n^*)$
 よって $\dim U^\circ = n - r = n - \dim U$.
2. (a)
 - 任意の $\eta \in W^*$ に対して $T^*(\eta) \in V^*$ であること.

$$\begin{aligned} \alpha_1, \alpha_2 \in K, v_1, v_2 \in V &\Rightarrow T^*(\eta)(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = (\eta \circ T)(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) \\ &= \eta(T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)) = \eta(\alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2)) = \alpha_1 \eta(T(v_1)) + \alpha_2 \eta(T(v_2)) \\ &= \alpha_1 (\eta \circ T)(v_1) + \alpha_2 (\eta \circ T)(v_2) = \alpha_1 T^*(\eta)(v_1) + \alpha_2 T^*(\eta)(v_2) \end{aligned}$$

よって $T^*(\eta) \in V^*$.

- T^* は K -線型であること.

$\alpha_1, \alpha_2 \in K, \eta_1, \eta_2 \in W^*, v \in V$ に対して

$$\begin{aligned} T^*(\alpha_1 \eta_1 + \alpha_2 \eta_2)(v) &= ((\alpha_1 \eta_1 + \alpha_2 \eta_2) \circ T)(v) = ((\alpha_1 \eta_1 + \alpha_2 \eta_2)(T(v))) \\ &= \alpha_1 \eta_1(T(v)) + \alpha_2 \eta_2(T(v)) = \alpha_1 (\eta_1 \circ T)(v) + \alpha_2 (\eta_2 \circ T)(v) \\ &= \alpha_1 T^*(\eta_1)(v) + \alpha_2 T^*(\eta_2)(v) = (\alpha_1 T^*(\eta_1) + \alpha_2 T^*(\eta_2))(v) \\ &v \text{ は任意だから } T^*(\alpha_1 \eta_1 + \alpha_2 \eta_2) = \alpha_1 T^*(\eta_1) + \alpha_2 T^*(\eta_2) \end{aligned}$$

よって T^* は K -線型.

- (b) • $\text{Ker}T^* \subset (\text{Im}T)^\circ$ であること.
 任意の $\eta \in \text{Ker}T^*$ をとり固定する. $T(v) \in \text{Im}T (v \in V) \Rightarrow \eta(T(v)) = (\eta \circ T)(v) = T^*(\eta)(v) = 0$. よって $T(v) \in \text{Ker}(\eta)$. すなわち $\text{Im}T \subset \text{Ker}(\eta)$. したがって $\eta \in (\text{Im}T)^\circ$. すなわち $\text{Ker}T^* \subset (\text{Im}T)^\circ$.
- $(\text{Im}T)^\circ \subset \text{Ker}T^*$ であること.
 任意の $\eta \in (\text{Im}T)^\circ$ をとる.
 $v \in V \Rightarrow T(v) \in \text{Im}T \subset \text{Ker}(\eta) \Rightarrow T^*(\eta)(v) = (\eta \circ T)(v) = \eta(T(v)) = 0$.
 $v \in V$ は任意だから $T^*(\eta) = \mathbf{0}_{V^*}$. ここで $\mathbf{0}_{V^*}$ は V^* の零元.
 よって $\eta \in \text{Ker}T^*$. したがって $(\text{Im}T)^\circ \subset \text{Ker}T^*$.

以上により $\text{Ker}T^* = (\text{Im}T)^\circ$.

- $\text{Im}T^* \subset (\text{Ker}T)^\circ$ であること.
 任意の $\eta = T^*(\xi) = \xi \circ T \in \text{Im}T^* (\xi \in W^*)$ をとる.
 $v \in \text{Ker}T \Rightarrow \eta(v) = T^*(\xi)(v) = \xi(T(v)) = 0$. よって $v \in \text{Ker}(\eta) \Rightarrow \text{Ker}T \subset \text{Ker}(\eta)$. したがって $\eta \in (\text{Ker}T)^\circ$. よって $\text{Im}T^* \subset (\text{Ker}T)^\circ$.
- $(\text{Ker}T)^\circ \subset \text{Im}T^*$ であること.
 $\{a_1, \dots, a_r\}$ を $\text{Ker}T$ の基底, $\{a_1, \dots, a_r\}$ を含む V の基底を $\{a_1, \dots, a_r, a_{r+1}, \dots, a_n\}$ とする. さらに $\{a_1, \dots, a_n\}$ の双対基底を $\{a_1^*, \dots, a_n^*\}$ とする. 任意の $\theta \in W^*$ をとる. $\{a_1, \dots, a_r\} \subset \text{Ker}T$ に注意して

$$\begin{aligned} T^*(\theta) &= \sum_{j=1}^n T^*(\theta)(a_j) a_j^* = \sum_{j=1}^n (\theta \circ T)(a_j) a_j^* \\ &= \sum_{j=r+1}^n (\theta \circ T)(a_j) a_j^* = \sum_{j=r+1}^n T^*(\theta)(a_j) a_j^* \end{aligned}$$

$\theta \in W^*$ は任意だから $\{a_{r+1}, \dots, a_n\}$ は $\text{Im}T^*$ の基底.

ところで任意に $\varphi \in (\text{Ker}T)^\circ$ をとる. $\text{Ker}T \subset \text{Ker}\varphi$ より $\{a_1, \dots, a_r\} \subset \text{Ker}\varphi$. したがって

$$\varphi = \sum_{j=1}^n \varphi(a_j) a_j^* = \sum_{j=r+1}^n \varphi(a_j) a_j^* \in \text{Span}(a_{r+1}, \dots, a_n) \subset \text{Im}T^*$$

よって $(\text{Ker}T)^\circ \subset \text{Im}T^*$.

以上により $\text{Im}T^* = (\text{Ker}T)^\circ$.

- (c) $\mathcal{A} = (a_1, \dots, a_n), \mathcal{B} = (b_1, \dots, b_m), \mathcal{A}^* = (a_1^*, \dots, a_n^*), \mathcal{B}^* = (b_1^*, \dots, b_m^*)$ とおく.
 すると

$$[T]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} b_1^*(T(a_1)) & b_1^*(T(a_2)) & \dots & b_1^*(T(a_n)) \\ b_2^*(T(a_1)) & b_2^*(T(a_2)) & \dots & b_2^*(T(a_n)) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_m^*(T(a_1)) & b_m^*(T(a_2)) & \dots & b_m^*(T(a_n)) \end{pmatrix}$$

一方

$$\begin{aligned} [T^*]_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{A}^*} &= \begin{pmatrix} T^*(b_1^*)(a_1) & T^*(b_2^*)(a_1) & \dots & T^*(b_m^*)(a_1) \\ T^*(b_1^*)(a_2) & T^*(b_2^*)(a_2) & \dots & T^*(b_m^*)(a_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ T^*(b_1^*)(a_n) & T^*(b_2^*)(a_n) & \dots & T^*(b_m^*)(a_n) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_1^*(T(a_1)) & b_2^*(T(a_1)) & \dots & b_m^*(T(a_1)) \\ b_1^*(T(a_2)) & b_2^*(T(a_2)) & \dots & b_m^*(T(a_2)) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1^*(T(a_n)) & b_2^*(T(a_n)) & \dots & b_m^*(T(a_n)) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

したがって $[T^*]_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{A}^*} = {}^t([T]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}})$.

今回の問題

1. n を正整数とし $0 \leq u_j < 1$ ($j = 1, \dots, n$) とするとき

$$(1 - u_1) \cdots (1 - u_n) \geq 1 - u_1 - \cdots - u_n$$

を示せ.

2. t を任意の実数とするとき, 以下を示せ

(a)

$$(1 + t)e^{-t} - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \left(\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} \right) t^k$$

(b)

$$|(1 + t)e^{-t} - 1| \leq |t|^2 e^{|t|}$$

問題について一言

2019 年春の集中講座「複素解析特論」で扱われた問題です. 解答お待ちしております.

宛先と締切

宛先 kuwanodojo@googlegroups.com

締切 2019 年 8 月 31 日 (土)

(郵送される場合は数学工房オフィスまでお願いいたします)

数学工房 2019 年 6 月 10 日発行
発行人 桑野耕一
編集人 増田卓、坂口尚文、半田伊久太

連絡先
オフィス電話: 042-495-6632
数学工房連絡用携帯: 080-6576-2691
連絡は極力 e-メールでお願いします。
e-mail: sugakukobo@w5.dion.ne.jp
e-mail: monteverdi2007@ezweb.ne.jp

公式ホームページ
<http://www.sugakukobo.com/>
数学工房教室
〒170-0003
東京都豊島区駒込 1-40-4
全国蕎麦製粉会館 2F 202・203
数学工房オフィス
〒204-0023
東京都清瀬市竹丘 1-17-26-401