Math.
No. 138
www.sugakukobo.com

会報 2022 年 7 月

数学工房

2022 年 夏 巻 頭 言

数学はもとより一人で学ぶ学問です。自分自身の中に自身の数学を育てなくてはなりません。その手立てとして先人の遺産である数学の確立された理論を型として学ぶわけです。通常は、初学者にとって、習得すべき良い型を選ぶのは困難ですから、そこに教師や先輩の役割があるわけです。そこで気を付けるべきは型というのはそこで扱われる知識を単に習得することが問題ではないのです。分からないことがあるのは本格的な学びなら当然、その中に見えてくる数学習得の姿勢、知識を系統化する努力、時に垣間見える数学の広がりそのような印象を心にとどめておくことが大切です。

ところで、5 月から諏訪紀幸先生の「数学理解のアート」という講座が各回読み切りで始まりました。中高の数学から始まり現代の代数の基本までという通奏低音が全体に流れた、私が上で述べた意味での型稽古のとても良い手解きだと思います。

毎回おっしゃっていますが、資料を全て理解する必要はない、時々眺めてみて気づきがあれば書き込みをしてコピーを取っておく。幸い何度でも印刷できるわけですから、どんどん書き換えることができます。こうして諏訪先生と対話しながら、ご自身の数学を育てていくと良いですね。上で私が述べた意味での手解きがいっぱいの講座です。そこから何を引き出すかはあなた次第です。尚会報夏学期号には参加した会員の 1 回目と 2 回目の講座の報告が続いています。ぜひご覧ください。

2022 年　夏　数学工房　桑野耕一

夏 学 期 講 座 案 内

2022 年 5 月〜8 月

2022 年夏学期講座は、入門初級 2 講座、初級 1 講座、初中級 1 講座、中級 3 講座、および諏訪先生による特別講義を開講します。

<< 夏学期講座一覧 >>

略号	講座名	講座開始日	レベル
I.B	複素関数論	7 月 9 日	入門初級
I.C	局所コンパクト群の表現	5 月 22 日	中級
G	抽象線型代数への招待	5 月 15 日	入門初級
E.A	距離空間	5 月 22 日	初中級
E.D	現代応用解析序論	7 月 2 日	初級
M.A	von Neumann 代数	7 月 10 日	中級
M.B	C^*-代数のテンソル積	5 月 14 日	中級
	特別講義	5 月 7 日	

◆ I.B　複素関数論
＜ 1 ＞ 複素微分可能性と正則関数
＜ 2 ＞ 実微分可能性と複素微分可能性　Poincare-Wirtinger 算法
＜ 3 ＞ べき級数
7/9 より隔週 3 回 (7/9, 7/23, 8/7)

◆ I.C　局所コンパクト群の表現
＜ 1 ＞ Radon 測度・局所凸空間に値をとる測度
＜ 2 ＞ Haar 測度
体系的な局所コンパクト空間上の Radon 測度と局所コンパクト空間値測度、Haar 測度の現代的理論の知見が得られるであろう。
5/22 より変則日程 6 回 (5/22, 6/19, 6/26, 7/2, 7/17, 7/31)

◆ G　抽象線型代数への招待
＜ 1 ＞ 内積空間の作用素 I
(1) 随伴
(2) 線型写像の構造
(3) 作用素ノルム
＜ 2 ＞ 内積空間の作用素 II
(1) 対称変換・等長変換・正射影
(2) 2 次形式の最大原理と対称変換の固有値分解・スペクトル定理
5/15 より隔週 3 回 (5/15, 5/29, 6/12)

◆ E.A　距離空間
＜ 1 ＞ 基本概念
＜ 2 ＞ 距離による位相の記述
＜ 3 ＞ 一様連続性
＜ 4 ＞ 完備・全有界・プレコンパクト

＜５＞Baire のカテゴリー定理
5/22 より変則日程 3 回 (5/22, 6/19, 6/26)

◆ E.D　現代応用解析序論
＜１＞Baire のカテゴリー定理
＜２＞一様有界性原理といくつかの基本定理
7/2 より隔週 3 回 (7/2, 7/17, 7/31)

◆ M.A　von Neumann 代数入門
$L(H)$ 上の基礎的な局所凸位相を論じる準備である。
＜１＞Hilbert-Schmidt クラス
＜２＞Trace class
＜３＞コンパクト作用素空間の双対、$L(H)$ の双対
7/10 より隔週 3 回 (7/10, 7/24, 8/7)

◆ M.B　C^*-代数のテンソル積
＜１＞C^*-代数のテンソル積と C^*-ノルム
＜２＞Special ノルムの最小性
＜３＞核型 C^*-代数の短完全系列
5/14 より隔週 3 回 (5/14, 5/28, 6/11)

◆特別講義 数学の理解のアート
諏訪紀幸
＜１＞Lagrange 補間と Newton 補間
＜２＞環の同型定理を巡って
＜３＞Euclid と Euler の対話
＜４＞整式と多項式
＜５＞組み合わせ論を捉えなおす
＜６＞一様収束
5/7 より変則日程 6 回 (5/7, 5/21, 6/18, 7/2, 7/16, 7/30)

[料金]
通常講座
一括前納 ￥32,000（学割￥25,000）
各回払い ３回のセミナー　１、２回目￥12,000（学割￥9,000）　３回目￥10,000（学割￥9,000）
６回のセミナー　１回目￥6,500（学割￥6,000）
２回目以降￥5,500（学割￥4,000）
オンライン受講
一括前納 ￥25,000
各回払い ￥9,000/回

会員からのメッセージ

■　諏訪先生の特別講義「数学の理解のアート」第１回目に参加して
逸見昌之

数学工房会員の逸見と申します. 先日, 桑野先生から, ５月初旬に行われた諏訪先生の特別講義 (第１回目) の紹介と感想を会報に書いて欲しいという依頼を受けました. 私は, 諏訪先生がお話された内容を全て理解できたわけではありませんが, この日の講義を大変興味深く聴かせていただきましたので, 感謝の意も込めて, 当日お話された内容の紹介と感想を私なりに書かせていただこうと思います.

第１回目のテーマは多項式に関する「Lagrange 補間と Newton 補間」. これらは, 数学工房の線型代数の講座で, 線型空間の基底を理解するための具体例としてしばしば登場しますので, 会員の方にはお馴染みのものだと思います. このテーマは, 桑野先生が中央大学で最初に講義をされた際の題材だったそうで, 数学のプロがプロの話をどのように聴いたかという趣旨で, 今回のお話がなされました. Lagrange 補間と Newton 補間は, 多項式による補間定理「相異なる実数 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ が与えられているとき, 任意の実数 $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ に対して, $n-1$ 次以下の多項式 $f(t)$ が唯一つ存在し, $f(\alpha_i) = \gamma_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ が成立する」に対して, それぞれ, ($n-1$ 次以下の) 多項式全体から成る線型空間の Lagrange 基底と Newton 基底を用いて示す方法ですが, 諏訪先生はまずこの方法の復習を行った後, この定理の「整数論バージョン」を提示され, Lagrange 補間と Newton 補間に対応する２つの方法,「Gauss の解法」と「Garner の解法」を紹介されました. 多項式補間は多項式への値の代入を伴い, また整数全体は線型空間ではないので, 私は最初, 整数の世界にも似た現象があるというのは不思議に思いましたが, 「$f(\alpha_i) = \gamma_i$」を, 高校で学んだ剰余の定理 (または因数定理) を用いて「$x - \alpha_i$ を法として f が γ_i と合同である」と読み替え, このような多項式 f を求めることを, 多項式全体を $(x - \alpha_1)\cdots(x - \alpha_n)$ で割った剰余類 (の代表元) を求めることとして見れば, 上記の多項式補間定理は, 整数に対する連立合同方程式の解についての定理と類似の構造を持つことが分かります. また, この類似性の背後には環の構造があり, 可換環とそのイデアルの言葉を用いて, これらの定理を含むより一般的な定理も提示されました. 諏訪先生は, 異なる数学的対象の中に類似の構造を見出すことの重要性を強調されましたが, この例はまさにそのエッセンスが詰まっていると感じます. また, 私の頭の中では Lagrange 補間や Newton 補間の問題が線型代数と強く結びついていたので, この意外な展開にハッとさせられ大変興味を覚えました.

次に諏訪先生は, Lagrange 基底を環論的視点から見直し, 補間問題とは異なる別の線型代数の問題への応用について話をされました. まず, 体 K 上の多項式環を多項式 $(x - \lambda_1)\cdots(x - \lambda_n)$ (但し $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ は K の相異なる元) で割って得られる剰余環において, Lagrange 基底 (を構成する各多項式を代表元とする n 個の剰余類) が「直交冪等元の完全系」となっていることに注意します. ここで「直交冪等元の完全系」とは, (環において) 全ての和が１で相異なる２つの積が０となる冪等元の組のことを意味します. すると, もし K 上の n 次正方行列 A の最小多項式が上記のように１次式の積で表されていれば, A を

Lagrange 基底 (を構成する各多項式) に代入して得られる n 個の行列が, n 次正方行列から成る環における直交冪等元の完全系 (すなわち射影行列の組) となり, さらに A がこれらの線型結合で表されることが分かります．そしてこれらのことから, A が対角化可能であることが導かれます．この事実は, 環の言葉を用いなくても示せるかも知れませんが, 上記の Lagrange 基底の「環論的性質」を通して見ることで, 問題の構造がよく分かり, 大変見通しがよくなっていると感じます．また, 私は Lagrange 基底は補間問題でしか見たことがなく, このようなところに現れるというのもまた意外でした．

最後の話題は, Newton 基底と二項係数, Stirling 数との関係についてです．Stirling 数には組合せ論的な意味がありますが, 諏訪先生はまず, (第 1 種・第 2 種) Stirling 数を, 多項式空間における標準基底と Newton 基底の基底変換の係数として定義され, それをもとに Stirling 数の漸化式を導いてから, 漸化式を比較することで, Stirling 数の組合せ論的意味を示されていました．代数的な定義と組合せ論的な意味があるという点は二項係数に似ていますが, Stirling 数は二項係数に比べるとやや複雑なので, このような漸化式を用いる考え方はより有効であると感じました．桑野先生の講義では, Newton 基底に関連して差分法の話がよく出てきますので, Stirling 数とその話との関係が気になりましたが, それを調べるのは後の楽しみにしたいと思います．

諏訪先生は受講者との対話を重視されているようで, 当日は諏訪先生が問いかける形で受講者との様々なやり取りがありました．今回の特別講義は, 普段の桑野先生の講義とはスタイルが異なるので, やや戸惑う部分もありますが, こちらも (今まで数学工房で学んだことを基に) 想像力を働かせて, 諏訪先生をガイドとする数学の旅を楽しみたいものです．数学工房での講義は (桑野先生の専門分野を反映して) 解析学系の科目が多いですが, 諏訪先生からは代数学の観点からお話が聞けることも魅力です．諏訪先生は先日の会報で,「そんな風潮の中, 数学工房の活動は貴重です」と書かれていますが, プロの数学者である諏訪先生が数学工房の活動にここまで賛同していただけることもまた貴重なことではないでしょうか．諏訪先生には, これからも長くお元気で, 桑野先生とともに私たちの数学の学びの道標であられることを願っています．

■　諏訪先生の特別講義「数学の理解のアート」第 2 回目に参加して

范揚武

会員の范揚武です．諏訪先生の特別講義第 2 回に参加しました．数学的な内容は, 環の準同型は, 剰余環等その原型が中学数学から既に現れていて, 感覚レベルでは中高生でも理解できる自然な定理であることから始まり, 部分体上の多項式について, 根の置換が体の同型を誘導するという, 感覚でわかっているだけのレベルでは（少なくとも私は）到達できないところまで講義されました．自然に感じ取れる事実から, 背後にある構造を見抜いて定理として認識することの威力, さらには数学的事実の認識の仕方の多様性とそれを整理することの威力がスパイスのように効かされていて, 目からウロコと共に「数学をすること」の楽しさ（そして道の遠さも）を感じました．

特別講義の骨組みについて, 私なりの理解を基に整理 (解釈) したものを紹介します．なお, 話の流れは講座とはかなり異なってしまいました．（忠実に再現できればベストですが, 私が力不足のため諦めました．勘違いすらあるかもしれませんが, ご容赦ください．）

まず, 理論の軸になる定理等を概観すると, 環の準同型定理（下記の定理 0.1）と注意 0.2, 注意 0.3 を踏まえると, 特別な場合として定理 0.4 が従うという流れです．

定理 0.1. *A, B は環, $\varphi : A \to B$ は環準同型, $\pi : A \to A/\operatorname{Ker}\varphi$ を標準商写像とすると, $A/\operatorname{Ker}\varphi$ には自然な環構造が誘導されて, π は環準同型である．このとき, $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \pi$ を満たす環準同型 $\tilde{\varphi} : A/\operatorname{Ker}\varphi \to B$ が存在する．*

注意 0.2. *B は可換環, A は B の部分環, $A[t_1, \ldots, t_n]$ は $t_1, \ldots, t_n$ を不定元とする A 係数多項式の集合とする．$a_1, \ldots, a_n \in B$ を固定して, $\varphi : A[t_1, \ldots, t_n] \ni f \overset{def}{\mapsto} f(a_1, \ldots, a_n) \in B$ とすると φ は環準同型であり, $\operatorname{Im}\varphi = A[a_1, \ldots, a_n]$ である（ここで, $A[a_1, \ldots, a_n]$ は $A \cup \{a_1, \ldots, a_n\}$ で生成される環を表す）．従って, 定理 0.1 の $\tilde{\varphi}$ は, $A[\{t_j\}_1^n]/\operatorname{Ker}\varphi$ から $A[a_1, \ldots, a_n]$ への環同型写像を与える．*

注意 0.3. *注意 0.2 において, $A = k$ を体, $B = K$ を k の拡大体, $n = 1$, $a_1 = a \in K$, $\varphi = \varphi_a$ として, さらに $\operatorname{Ker}\varphi_a \neq \{0_{k[t]}\}$(すなわち, a は k 上で代数的) のときを考えると, $p \in k[t]$ が存在して, $\operatorname{Ker}\varphi_a = p \cdot k[t]$ と表せて, さらに p は $k[t]$ で既約多項式である．これより, $k[t]/\operatorname{Ker}\varphi$ は体であることが従う．すると, 定理 0.1 の $\tilde{\varphi_a}$ は, 体 $k[t]/\operatorname{Ker}\varphi_a$ から環 $k[a]$ への環同型写像となる．これは, $k[a]$ が体であり, $\tilde{\varphi_a}$ は体同型写像であることを意味する．*

定理 0.4. *注意 0.3 の場合において, $p(b) = 0$ となる $b \in K$ をとって, φ_a と同様に φ_b をつくれば, $\operatorname{Ker}\varphi_a = \operatorname{Ker}\varphi_b$ であり, $\tilde{\varphi_b}$ は, $k[t]/\operatorname{Ker}\varphi_a$ から $k[b]$ への体同型写像となる．従って, $\varphi_b \circ (\varphi_a)^{-1} : k[a] \to k[b]$ は体の同型写像となる．*

$$\begin{tikzcd}
k[a] & \\
k[t] \arrow[u, "\varphi_a"] \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\varphi_b"'] & k[t]/\operatorname{Ker}\varphi_a \arrow[ul, "\tilde{\varphi_a}"'] \arrow[dl, "\tilde{\varphi_b}"] \\
k[b] &
\end{tikzcd}$$

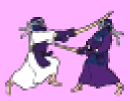
定理 0.1 を通して見ることによって, 注意 0.3 や定理 0.4 が成立する構造がよく見えて, 同時に, k 上で代数的であることや最小多項式の既約性がどのように効いているかもクリアになります.

中学・高校数学からの自然な橋渡しを試みるなら, 剰余環の典型例とも言える $\mathbb{Q}[\sqrt{2}], \mathbb{Q}[\sqrt{-1}]$ が環であることは, 計算法則からわかるだろう（あるいは計算の経験から感じ取れる). さらに, 分母の有理化から体であることも意識すればわかる. 気の利いた学生なら $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}], \mathbb{Q}[\omega]$($\omega$ は 1 の原始 3 乗根) 等も体であることが予想可能だろうし, さらに力があれば上手に計算して示せる（ちょっとした入試問題にもなる）. このように観れば, 中高生にも剰余環あるいは定理 0.1 を一定の範囲で理解し, 感覚をつかめる. ただ, 定理 0.4 になると, 一定の範囲での理解や感覚レベルでの理解では難しく, これを定理 0.1 のレベルまで掘り下げて認識し, 注意 0.2, 注意 0.3 との繋がりも見抜く必要がある.

(ここから先は, 私の感想に近いです. ）先生は話の中で, 線型代数の効用として, a が k 上で代数的であること, 拡大次元の有限性, $k[a]$ が体であることが全て同値であることを示され, 個々の特徴づけの捉え方の違いとこのような整理の重要性を強調されました. 私には, これが諏訪先生のテキストで引用されている桑野先生の「認識の転換」（会報 136 号）の例であって, おぼろげに見えるものや感覚レベルでのものから, 実体を捉えようとするとき, 解釈を加えて既存の知識を豊かにして掘り下げて行くという道標に思えて, 一人で納得しています（笑）. （先生の意図に沿っているか自信がありませんが…）

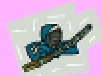
また先生は, 数学教育に対する危機感, 特に中高数学での解法・公式の暗記に走り思考停止状態を量産している教育への危機感も鋭く,「ゆっくりじっくり考える」をモットーに小規模ながら数学教室を開いている者として, 共感するところが多くありました. そのような観点からも, 環準同型定理を, 一方では中高数学と橋渡しし, 一方ではその威力を見るという先生のお話は刺激であり, 私自身が考える力をもっと鍛えなければ…と気持ちが引き締まりました.

私が「数学をする」（中高生に教えることもその中の一つと思っています）上で, 数学工房での稽古はとても大きな意味を持っています. 今後ともどうぞよろしくお願いいたします.



入門桑野道場（第 49 回）

/// 記　桑野道場師範代　半田伊久太 ///



前回の問題

$(V, \langle , \rangle_V)$, $(W, \langle , \rangle_W)$ を $\mathbb{R}$ 上の有限次元内積空間,
$\mathcal{L}\ (V, W) := \{T : V \to W \,|\, T$ は $\mathbb{R}-$ 線型写像 $\}$ とするとき，以下を示せ.

1. 双線型形式 $\Phi : V \times W \to \mathbb{R}$ が与えられているとき，$T_\Phi \in \mathcal{L}(V, W)$ が一意的に定まり，

$$\Phi(v, w) = \langle T_\Phi(v), w\rangle_W \quad (v, w) \in V \times W$$

   が成立する.
2. 双線型形式 $\Phi : V \times W \to \mathbb{R}$ と Φ に一意的に対応する $T_\Phi \in \mathcal{L}(V, W)$ について，
   Φ が非退化である必要十分条件は T_Φ は同型であることである.
   ここで双線型形式 $\Phi : V \times W \to \mathbb{R}$ が非退化であるとは

$$\begin{cases} 1^\circ\ \Phi(v, w) = 0\,(\ \forall v \in V)\ \text{ならば}\ w = \mathbf{0} \\ 2^\circ\ \Phi(v, w) = 0\,(\forall w \in W)\ \text{ならば}\ w = \mathbf{0} \end{cases}$$

   が成立することを言う.
   例えば，内積は非退化双線型形式である.
3. $\mathcal{L}(V \times W, \mathbb{R})$ を $V \times W$ 上の双線型形式全体の集合とするとき 次が成立する.
   (a) $\mathcal{L}(V \times W, \mathbb{R})$ は $\mathbb{R}$ 上の線型空間.
   (b) $\mathcal{L}(V, W) \ni T \mapsto \Phi_T \in \mathcal{L}(V \times W, \mathbb{R})$ なる対応は線型同型.
   ここで $\Phi_T(v, w) = \langle T(v), w\rangle_W$.

解答

1. 任意の $v \in V$ をとり固定する. $\phi_v(w) := \Phi(v, w)\,(w \in W)$ とおく.
   明らかに $\phi_v : W \to \mathbb{R}$ は $\mathbb{R}-$ 線型形式. 線型形式の表現定理により
   $\phi_v(w) = \langle \nabla\phi_v, w\rangle_W\ (w \in W)$ を満たす $\nabla\phi_v \in W$ が一意に存在する.
   $T_\Phi : V \ni v \mapsto \nabla\phi_v \in W$ として T_Φ を定義する.

すると $\langle T_\Phi(v),w\rangle_W=\langle\nabla\phi_v,w\rangle_W=\phi_v(w)=\Phi(v,w)\,((v,w)\in V\times W)$ が成立する．
また，$T_\Phi\in\mathcal{L}(V,W)$ である．実際，$\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R},v_1,v_2\in V,w\in W$ に対して，

$$\begin{aligned}\langle T_\Phi(\alpha_1v_1+\alpha_2v_2),w\rangle_W&=\Phi(\alpha_1v_1+\alpha_2v_2,w)\\&=\alpha_1\Phi(v_1,w)+\alpha_2\Phi(v_2,w)\\&=\alpha_1\langle T_\Phi(v_1),w\rangle_W+\alpha_2\langle T_\Phi(v_2),w\rangle_W\\&=\langle\alpha_1T_\Phi(v_1)+\alpha_2T_\Phi(v_2),w\rangle_W\end{aligned}$$

$w\in W$ は任意だから $T_\Phi(\alpha_1v_1+\alpha_2v_2)=\alpha_1T_\Phi(v_1)+\alpha_2T_\Phi(v_2)$.
したがって $T_\Phi\in\mathcal{L}(V,W)$．$T_\Phi$ の一意性は内積の正定値性より従う．

2. • T_Φ が同型ならば Φ は非退化であること．
   1° $\Phi(v,w)=0\,(\ \forall w\in W)$ であれば $\langle T_\Phi(v),w\rangle_W=\Phi(v,w)=0\,(\forall w\in W)$.
   よって $T_\Phi(v)=\mathbf{0}_W$．T_Φ は同型だから $v=\mathbf{0}_V$．
   2° $\Phi(v,w_0)=0\,(\forall v\in V)$ を満たす $w_0\in W$ について任意の $w\in W$ をとれば，
   $\langle w,w_0\rangle_W=\langle T_\Phi\circ(T_\Phi^{-1}(w)),w_0\rangle_W=\Phi(T_\Phi^{-1}(w),w_0)=0$.
   内積の正定値性より $w_0=\mathbf{0}_W$．
   以上により Φ は非退化である．
   • Φ が非退化ならば T_Φ は同型であること
   $u\in\operatorname{Ker}T_\Phi$ ，任意の $w\in W$ に対して $\Phi(u,w)=\langle T_\Phi(u),w\rangle_W=\langle\mathbf{0}_W,w\rangle_W=0$.
   Φ の非退化性より $u=\mathbf{0}_V$．$\operatorname{Ker}T_\Phi=\{\mathbf{0}_V\}$．よって T_Φ は単射.
   次に T_Φ の全射性を示す.
   W の線型部分空間 $(\operatorname{Im}T_\Phi)^\perp$ を考える．
   $w_0\in(\operatorname{Im}T_\Phi)^\perp$ とすると $\Phi(v,w_0)=\langle T_\Phi(v),w_0\rangle_W=0\,(\forall v\in V)$.
   Φ の非退化性より $w_0=\mathbf{0}_W$．すなわち $(\operatorname{Im}T_\Phi)^\perp=\{\mathbf{0}_W\}$．よって $\operatorname{Im}T_\Phi=W$.
   すなわち T_Φ は全射．以上により $T_\Phi:V\to W$ の同型性が示された.
3. (a) 明らかに $0_{\mathcal{L}(V\times W,\mathbb{R})}\in\mathcal{L}(V\times W,\mathbb{R})$．よって $\mathcal{L}(V\times W,\mathbb{R})\neq\emptyset$.
   $\phi_1,\phi_2\in\mathcal{L}(V,W)$, $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\in\mathbb{R},v_1,v_2\in V,w\in W$ に対して，

$$\begin{aligned}(\alpha_1\phi_1+\alpha_2\phi_2)(\beta_1v_1+\beta_2v_2,w)&=\alpha_1\phi_1(\beta_1v_1+\beta_2v_2,w)+\alpha_2\phi_2(\beta_1v_1+\beta_2v_2,w)\\&=\beta_1\alpha_1\phi_1(v_1,w)+\beta_2\alpha_1\phi_1(v_2,w)+\beta_1\alpha_2\phi_2(v_1,w)+\beta_2\alpha_2\phi_2(v_2,w)\\&=\beta_1(\alpha_1\phi_1(v_1,w)+\alpha_2\phi_2(v_1,w))+\beta_2(\alpha_1\phi_1(v_2,w)+\alpha_2\phi_2(v_2,w))\\&=\beta_1(\alpha_1\phi_1+\alpha_2\phi_2)(v_1,w)+\beta_2(\alpha_1\phi_1+\alpha_2\phi_2)(v_2,w)\end{aligned}$$

   よって $\alpha_1\phi_1+\alpha_2\phi_2$ は左線型，同様に右線型．したがって $\alpha_1\phi_1+\alpha_2\phi_2\in\mathcal{L}(V\times W,\mathbb{R})$.
   以上により $\mathcal{L}(V\times W,\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}^{V\times W}$ の線型部分空間.
   (b) $\Theta:\mathcal{L}(V,W)\ni T\mapsto\Phi_T\in\mathcal{L}(V\times W,\mathbb{R})$ とする．
   • Θ の線型性は内積の双線型性より直ちに従う．
   • Θ の単射性
   任意の $T\in\operatorname{Ker}\Theta$ をとる．
   $\Theta(T)=0_{\mathcal{L}(V\times W,\mathbb{R})}$ だから $\Theta(T)(v,w)=\langle T(v),w\rangle_W=0\,((v,w)\in V\times W))$ ．したがって $T(v)=\mathbf{0}_W(v\in V)\Rightarrow T=0_{\mathcal{L}(V,W)}\Rightarrow\operatorname{Ker}\Theta=\{0_{\mathcal{L}(V,W)}\}$.
   以上により Θ は単射.
   • Θ の全射性
   $\Theta:\mathcal{L}(V,W)\ni T\mapsto\Phi_T\in\mathcal{L}(V\times W,\mathbb{R})$ に対して $\Phi_T(v,w)=\langle T(v),w\rangle_W\,((v,w)\in V\times W)$ ．任意の $\Phi\in\mathcal{L}(V\times W,\mathbb{R})$ に対して一意的に $T_\Phi\in\mathcal{L}(V,W)$ が定まるから $\langle T_\Phi(v),w\rangle_W=\Phi(v,w)$．よって $\Theta(T_\Phi)(v,w)=\langle T_\Phi(v),w\rangle_W=\Phi(v,w)$.
   すなわち $\Theta(T_\Phi)=\Phi$．よって Θ は全射.
   以上により Θ は線型同型.

注意

以下の事実は用いた．

- 線型形式の表現定理
  $(V,\langle,\rangle)$ を $\mathbb{R}$ 上の有限次元内積空間，$\phi:V\to\mathbb{R}$ を $\mathbb{R}-$ 線型形式とするとき
  次の条件を満たす $\nabla\phi\in V$ が一意に存在する．

$$\phi(v)=\langle\nabla\phi,v\rangle\,(\forall v\in V)$$

- $(V, \langle , \rangle)$ を $\mathbb{R}$ 上の有限次元内積空間，U を V の線型部分空間とする．さらに，$U^{\perp}$ は U の直交補空間，すなわち $U^{\perp} = \{v \in V \mid \langle u, v \rangle = 0\,(\forall u \in U)\}$ とするとき，
$V = U \bigoplus U^{\perp}$（直交直和）が成立する．

今回の問題

1. $\omega \in \mathbb{C}$ が $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ を満たすとき，
$\mathbb{Q}[\omega] = \mathbb{Q}(\omega) = \{a + b\omega \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ であることを示せ．
2. $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}\,] = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\,) = \{a + b\sqrt[3]{2} + c(\sqrt[3]{2})^2 \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$ であることを示せ．

ただし，$\alpha \in \mathbb{C}$ に対して $\mathbb{Q}[\alpha] := \{f(\alpha) \mid f \in \mathbb{Q}[x]\}$，$\mathbb{Q}(\alpha)$ は $\mathbb{Q} \cup \{\alpha\}$ を含む $\mathbb{C}$ の最小の部分体であるとする．ここで $\mathbb{Q}[x]$ は x を変数とする有理係数多項式全体を表す．

問題について一言

「諏訪先生の特別講義　数学の理解のアート　第 2 回」で扱われた問題です．
皆様の解答をお待ちしております．

宛先と締切

宛先　kuwanodojo@googlegroups.com
締切　2022 年 8 月 31 日（水）
(郵送される場合は数学工房オフィスまでお願いいたします)

数学工房　　2022 年 7 月 30 日発行
発行人　　桑野耕一
編集人　　増田卓、坂口尚文、半田伊久太
連絡先
オフィス電話：042-495-6632
数学工房連絡用携帯：080-6576-2691
連絡は極力 e-メールでお願いします。
e-mail：sugakukobo@w5.dion.ne.jp
e-mail：monteverdi2007@ezweb.ne.jp
公式ホームページ
http://www.sugakukobo.com/
数学工房教室
〒170-0003
東京都豊島区駒込 1-40-4
全国蕎麦製粉会館 2F　 202・203
数学工房オフィス
〒204-0023
東京都清瀬市竹丘 1-17-26-401