数学工房会報

2022年
No.139

巻　頭　言

　塩野直道という名前をご存知でしょうか？緑表紙といわれる、戦前の国際的にも評価の高い小学校算数の著者です。「日本をアジアの劣等国に、GHQ がぶっ壊した日本の数学教育」といういささか扇動的なタイトルの、某通信社の配信記事が目に留まりました。この種の通信社の記事はかなりバイアスが、かかっているので、注意して読む必要がありますが、大手マスコミの様な忖度がないので、時に率直な参考になる論説があります。

　GHQ の件はわきに置いといて、小倉金之助先生の数理思想に深く影響された、塩野直道の一貫した数理思想に基づき、編集された優れた教科書が存在した、ということをこの論説から、教えてもらいました。そういえば大正の末から昭和の初めに生まれた世代、私の父母の年代（現在 90-100 歳位の世代）たとえ、学歴が小学校卒でも、基礎的な算数や国語の力が非常に高かったという印象があります。これは、私の個人的な経験ですが、算数に興味をしめさず、いやいやながら宿題をやる私を見かねてか、母が算数の応用問題の手解きをしてくれたのです。与えられた問題の関係を実に上手に図示して鮮やかに、しかも楽しそうに！文字記号を知れば、この絵から方程式への移行は一息です。論理明晰なのです。算数教育に熱心な当時最先端を行く小学校だったこともあるようですが、おそらく、この教科書ですね。この記事を読んだせいで、数日後、朝目覚めた時に、中学校の時、塩野直道先生著の啓林館の教科書？を使っていたことを思い出しました。突然、表紙が目の前にうかんだのです。そしてすっかり忘れていた、教室の風景を思い出しました。実用的な三角比や 10 進対数、数表を使い応用問題をたくさん解いた気がします。確か計算尺の使い方の実習を兼ねていたような気がします。2 次関数の標準形もずいぶん時間をかけて演習したように思います。無論 M 先生が熱心で放課後にたくさん問題をやっていたのだと思います。授業時間内で、収まるはずはありません。尤も私は困った生徒で、授業中に矢野先生の解析幾何の本を読んでいて、M 先生に取り上げられてしまいました。休み時間に呼び出されて恐る恐る教員室に行くと、先生はにっこり笑って「余程好きなのだね！」の一言。ごくありきたりの公立の中学校の授業の風景です。私は復古主義者ではありませんが、こうしてみると最近の 50 年、数学の教育が数学でなくなり、ブロイラー製造所になっていく崩壊していく一方の過程だったと思います。GHQ が一つの引き金になったかもしれませんが、この過程は、教育行政、政治、父母、数学の教育、数学に携わる者たちの思惑の共同作業の結果です。

　今、哲学なき軽薄な英語教育の暴走で、教育全体にさらにダメッジを与えようとしています。いったいこの国はどこに行くつもりでしょう。緑表紙の教科書の特徴として、塩野の数理思想、教育の理想に基づき編集されている明確な目標と主張をもっているということがあります。我田引水になりますが、数学工房の教程も、対象は、数学の専門教育の準備ですが、先人の数学の研究と向き合いながら対話しつつ学びつつ一人で作り上げたものです。塩野という偉大な先達がいたことでちょっと励まされました。

　ところで 5 月から 8 月まで、「数学理解のアート（小中高の数学に現代数学の雛形を見る」というタイトルで、諏訪紀幸先生の一貫した数学観に基づく全 6 回の読み切り講義をしていただきました。この講義も、塩野先生の遺産と響きあうものだと感じました。結局、数学を学ぶというのは、人類が向き合ってきた、数学との交わりの過程の歴史を自分の中に、再現することだと思います。参加された方は、対話を楽しみつ

つご自身の数学的経験や知識を、現代数学の基礎的な道具を梃子にして育てていくという学びの姿勢を感得されたのではないかと思います。巻頭言の場を借りて諏訪先生に感謝申し上げます。尚、今号の会員紹介欄は特別講義第 3 回の報告と感想が載っていますので合わせてご覧ください。また、桑野道場の「今回の問題」でも諏訪先生の特別講義にちなんだものを取り上げています。

数学工房　桑野耕一　　2022 年秋に

秋学期講座案内　2022年 9〜12月

入門・初級

♦ IB 複素関数論 II

1. Wirtinger 算法と調和関数
2. 収束の様相
3. 収束冪級数で表示される解析関数
4. Möbius 変換と cross ratio

– 隔週土曜全 3 回　13:30–17:30
– 11/12、11/26、12/10

♦ G 抽象線型代数への招待 VI
—複素線型空間—

1. 複素線型代数と実構造
   1.1. 複素線型空間の複素構造
   1.2. 実ベクトル空間の複素化
2. 複素内積空間
   2.1. 複素内積
   2.2. 複素内積空間上の線型作用素

– 隔週日曜全 3 回　13:30–17:30
– 9/18、10/2、10/16

初級

♦ ED 現代応用解析序論 VII
—Hahn-Banach と Krein-Milman の定理—

0. 位相線型空間入門
1. Hahn-Banach の定理の 2 つの表現形式
2. Hahn-Banach の定理が応用される 3 つの型
3. Krein-Milman の定理

– 隔週日曜全 3 回　13:30–17:30
– 11/6、11/20、12/4

初・中級

♦ EA 距離空間 II
—コンパクト・全有界・完備 —

0. 一様連続、一様同相
1. 全有界
2. Fréchet compact、完備、全有界
3. 補遺

– 隔週日曜全 3 回　13:30–17:30
– 9/25、10/9、10/23
– オンライン受講可

中級

♦ IC 局所コンパクト群の表現
—続 Haar 測度・等質空間の測度

1. Haar 測度
2. 局所コンパクト群上の有限複素測度のコンボリューション代数
3. 局所コンパクト群の有界 Banach 表現と有限複素測度の Banach$*$ 代数の表現
4. Gelfand-Raikov の定理

– 隔週日曜全 6 回　10:30–12:30
– 9/25、10/9、10/23、11/6、11/20、12/4
– オンライン受講可

♦ MA Von Neumann 代数
—$L(H)$ 上の 4 つの局所凸位相

1. $L(H)$ 弱位相と超弱位相
   1.1. 弱位相

1.2. 超弱位相

1.3. 3 つの局所凸位相

2. 弱位相による von Neumann 代数の特徴付け

3. Von Neumann 代数の predual、W^*-代数

– 変則日曜全 3 回　13:30–17:30
– 11/13、11/27、12/18
– オンライン受講可

♦ MB C^*-代数のテンソル積
—Spatial norm の最小性

0. C^*-代数の無限直和のテンソル積

1. 普遍表現のテンソル積と Spatial ノルムのステート表現

2. C^*-代数のテンソル積上のステート、$*$-自己同型

3. C^*-代数のテンソル積上の純粋状態と Takesaki の定理

4. Spatial norm の最小性

– 隔週土曜全 3 回　13:30–17:30
– 9/17、10/1、10/15
– オンライン受講可

講座料について
各講座、税込￥32,000(学割￥25,000) です。オンラインの場合　￥25,000（ただしオンライン受講可能な場合）途中参加の場合、
・3 回講座は、1、2 回目¥ 12,000(学割 ¥ 9,000)、3 回目¥ 10,000(学割 ¥ 9,000) です。
・6 回講座は、1 回目¥ 6,500(学割 ¥ 6,000)、2 回目以降¥ 5,500/回 (学割 ¥ 4,000/回) です。
・オンラインの場合は、各回¥ 9,000 です。

講座、研究会等に御参加いただくには今年度の数学工房の年会費が払込み済みであることが必要です。

・銀行口座: 三井住友銀行 清瀬支店 普通預金 口座番号 4585253 数学工房 桑野耕一
・郵便振替: 00150-9-686515 数学工房

諏訪先生の特別講義に参加して

第 3 回「Euclid と Euler の対話」　石神誠一

数学工房会員の石神誠一と申します。2022 年 6 月 4 日に行われた、諏訪先生による特別講義について、講義の内容と所感をご報告します。第 3 回の講義の表題は「Euclid と Euler の対話」でした。数学の巨匠 Euclid と Euler の間の、時空を超えて交わされた対話についてです。

全 6 回の諏訪先生の講義に共通して言えることは、諏訪先生は小中高の算数・数学と現代数学との関係を伝え、「現代数学は、小中高の算数・数学の中に表れている」ことを強調されていたことです。今回の講義では、まず小学校で習う「10 進位取り法」の話から始まりました。現代では世界中のあらゆる地域で使われている 10 進位取り法も、数学の歴史を遡ると、決して自明なものではないとのことです。10 進位取り法を当たり前のものとして受け入れている私たちにとっては、ローマ数字を使っての計算はとてもできません。10 進位取り法というものを改めて振り返ることで、これは小学校の算数で習う人類の財産と呼べるものであると感じることができました。

講義は「1. 完全数」「2. Ptolemy の定理」「3. 素数が無限に存在する」「4. 参考文献」と、4 つの節で構成されていました。それぞれの節について、順を追って報告します。

1．完全数

Euclid『原論』では、ある正の偶数が完全数であることの十分条件の証明が行われています．命題は以下の通りです。

(Euclid-Euler). $n = 2^r m \quad (r > 0,\ m$ は奇数) とする。$S_1(n) = 2n$ となるのは $m = 2^{r+1} - 1$ で m が素数のときに限る。

注. $S_1(n)$ とは、n の正の約数の和である。正の整数 n が完全数であるとは、$S_1(n) = 2n$ が成立することである。

この命題の”$\Leftarrow$”の証明はEuclidにより証明され、”$\Rightarrow$”の証明は、2000年近い時を経て、Eulerにより証明されました。ここで、この一つの命題を通じて、数学の巨匠二人による、時空を超えた対話が行われていることが興味深いところです。Euclidの時代とEulerの時代の間において、数学的状況についての最大の違いは、Euclid『原論』には数式がまったく登場しないことです。Euclid『原論』は、定義・命題・証明という論述形式で記述されており、これは現代数学の論述形式にも受け継がれているものです。にも関わらず、今日私たちが数学を行う上で当たり前のように用いている数式が、Euclid『原論』には登場しないことは、私には意外なことのように思えました。Euclidによる証明は、数式を用いないため長々としたものですが、現代では数式を使うことで、Euclidによる証明をたった二行で書き表すことができます。また、Eulerによる必要条件の証明は、数式を使うことで初めて可能となるものです。これらの話を通じ、数式もまた、10進位取り法と同様に人類の財産であることが実感できました。

2．Ptolemyの定理

命題の内容は次の通りです。

(Ptolemy). 四角形 $ABCD$ が円に内接するとき、$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$ が成立する。

Ptolemyによる証明は、補助線を1本入れることが決定打となる、初等幾何の方法によるものです。これに対しEulerは、複素数の性質を利用した証明を与えました。ここでも、一つも問題を通じて、古代ギリシャのPtolemyと18世紀のEulerが、時空を超えた対話を交わしていることを観察できました。同時に、一つの問題の中に、初等幾何の問題と複素数の問題が同時に潜んでおり、どちらのアプローチでも解くことができることに、面白さを感じました。

3．素数は無限に存在する

Euclid『原論』では、素数の個数は、いかなる定められた素数の個数よりも多い、つまり「素数が無限に存在する」ことの証明が行われています。ただし『原論』には数式が登場しないため、その証明は長くでわかりにくいものです。これを数式を用いて書き直すと、現代の私たちにとっても簡潔でわかりやすいものに書き表すことができます。ここでも、数式という発明がいかに重要かを感じることができました。さらにEulerは、素因数分解の一意性を用いた、Euclidの方法とは異なる方法による証明を与えています。ここでも、数学の巨匠による時空を超えた対話、および一つの問題が複数の顔を持っていることを観察できました。

4．参考文献

共立出版の『ユークリッド原論』、および朝倉書店の『数学の歴史　Ⅰ、Ⅱ（メルツバッハ＆ボイヤ)』が紹介されました。この他にも、講義中に高木貞治『数学雑談』への言及がありました。『数学雑談』の3節で、Ptolemyの初等幾何の定理は複素数の性質からも証明できることが触れられているとのことです。　今回の講義を通じて、私が強く感じたことは、ある問題の中から「型」を見破ることの重要さについてです。Euclidの『原論』の証明は、数式という「型」によって翻訳することで、現代の私たちにとって、より鮮明に理解することができるようになります。Ptolemyの定理の証明には、初等幾何の「型」と複素数の「型」という、二つの「型」が存在することを確認できました。素数が無限に存在することの証明も、一見するとEuclidによる証明が完成された「型」のように見えますが、Eulerによる証明は、異なる「型」を用いるものであり、Euclidの証明の「型」が唯一のものではないことが納得できました。　2000年以上昔の古代の問題の中にも、改めて眺めてみると興味深い「型」が潜んでおり、その問題を通じて、数学者たちによる時代を超えた対話を観察することができました。「型」を見破ることは、一朝一夕でできることではありませんが、これができるようになることを目指して、古代の問題に限らず、あらゆる数学の問題に向き合いたいと思いました。

入門　桑野道場　（第50回）

//記　桑野道場師範代　半田伊久太//

前回の問題

1. $\omega \in \mathbb{C}$ が $\omega^2+\omega+1=0$ を満たすとき，
   $\mathbb{Q}[\omega]=\mathbb{Q}(\omega)=\{a+b\omega \mid a,b\in\mathbb{Q}\}$ であることを示せ．

2. $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}\,]=\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\,)=\{a+b\sqrt[3]{2}+c(\sqrt[3]{2})^2 \mid a,b,c\in\mathbb{Q}\}$ であることを示せ．

ただし，$\alpha\in\mathbb{C}$ に対して $\mathbb{Q}[\alpha]:=\{f(\alpha)\mid f\in\mathbb{Q}[x]\}$，$\mathbb{Q}(\alpha)$ は $\mathbb{Q}\cup\{\alpha\}$ を含む $\mathbb{C}$ の最小の部分体であるとする．ここで $\mathbb{Q}[x]$ は x を変数とする有理係数多項式全体を表す．

解答

1. $K:=\{a+b\omega\ \mid a,b\in\mathbb{Q}\}$ とおく．
   $\mathbb{Q}(\omega)$ が体であることに注意すると，$\mathbb{Q}\cup\{\omega\}\subset K\subset\mathbb{Q}[\omega]\subset\mathbb{Q}(\omega)$ であることは明らかである．K が $\mathbb{C}$ の部分体であることを示す．$\xi,\eta\in K\Rightarrow\xi+\eta,\xi\eta\in K$ であることは容易．
   $\xi\in K,\xi\neq 0\Rightarrow 1/\xi\in K$ が成立する．実際，$\xi=a+b\omega\,(a,b\in\mathbb{Q})$ と書ける．
   $a+b\omega^2\neq 0$ と $\omega^2+\omega+1=0$ に注意して，
   $$\frac{1}{\xi}=\frac{1}{a+b\omega}=\frac{a+b\omega^2}{(a+b\omega)(a+b\omega^2)}=\frac{a-b-b\omega}{a^2+b^2-ab}=\frac{a-b}{a^2+b^2-ab}+\frac{-b}{a^2+b^2-ab}\omega\in K.$$
   以上により K は $\mathbb{C}$ の部分体．（$a^2+b^2>0$ より $a^2+b^2-ab>0$ に注意）
   $\mathbb{Q}(\omega)$ の最小性より $\mathbb{Q}(\omega)\subset K$．したがって $K=\mathbb{Q}[\omega]=\mathbb{Q}(\omega)$．

2. $\alpha:=\sqrt[3]{2}$, $K:=\{a+b\alpha+c\alpha^2\mid a,b,c\in\mathbb{Q}\}$ とおく．
   $\mathbb{Q}(\alpha)$ の定義から，$\mathbb{Q}\cup\{\alpha\}\subset K\subset\mathbb{Q}[\alpha]\subset\mathbb{Q}(\alpha)$ であることは明らかである．K が $\mathbb{C}$ の部分体であることを示す．$\xi,\eta\in K\Rightarrow\xi+\eta,\xi\eta\in K$ であることは容易．
   $\xi\in K,\xi\neq 0\Rightarrow 1/\xi\in K$ が成立する．実際，$\xi=a+b\alpha+c\alpha^2\,(a,b,c\in\mathbb{Q})$ と書ける．
   $f(x):=a+bx+cx^2$ とおく．$\xi\neq 0$ より $(a,b,c)\neq(0,0,0)$．すなわち $f(x)$ は零多項式ではない．$x^3-2\in\mathbb{Q}[\alpha]$ は既約（$\because\ \alpha=\sqrt[3]{2}\notin\mathbb{Q}$）なので，$x^3-2$ と $f(x)$ は共通因子を持たない．よって $f_1(x),g_1(x)\in\mathbb{Q}[x]$ が存在して，
   $$\frac{1}{(x^3-2)f(x)}=\frac{g_1(x)}{x^3-2}+\frac{f_1(x)}{f(x)}\,,\ \deg g_1(x)<\deg(x^3-2)=3\,,\ \deg f_1(x)<\deg f(x).$$
   よって $g_1(x)f(x)+(x^3-2)f_1(x)=1$．$x=\alpha$ を代入すると $g_1(\alpha)f(\alpha)=g_1(\alpha)\xi=1$．$\deg g_1(x)<3$ に注意すると $1/\xi=g_1(\alpha)\in K$．以上により K は $\mathbb{C}$ の部分体．
   $\mathbb{Q}(\alpha)$ の最小性より $\mathbb{Q}(\alpha)\subset K$．
   以上により，$K=\{a+b\alpha+c\alpha^2\mid a,b,c\in\mathbb{Q}\}=\mathbb{Q}[\alpha]=\mathbb{Q}(\alpha)$．

今回の問題

定義

$\{f_n(x)\}_{n\geq 0}$を区間 I における函数列，$f(x)$ を区間 I 上の函数とする．
任意の実数 $\varepsilon>0$ に対して自然数 $N>0$ が存在して，$n\geq N$ なら各 $x\in I$ に対して $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ となるとき，函数列 $\{f_n(x)\}_{n\geq 0}$ は区間 I において $f(x)$ に一様収束をするという．

問題

1. 区間 I 上の函数列 $\{f_n(x)\}_{n\geq 0}$ が与えられたとき，次は同値であることを示せ．

   (a) 函数列 $\{f_n(x)\}_{n\geq 0}$が I において $f(x)$ に一様収束する．

   (b) $\sup\{|f_n(x)-f(x)|\colon x\in I\}\to 0\,(n\to\infty)$.

2. $\{f_n(x)\}_{n\geq 0}$を区間 I における連続函数の列 とする．
   函数列 $\{f_n(x)\}_{n\geq 0}$が区間 I において函数 $f(x)$ に一様収束するなら，$f(x)$ もまた区間 I において連続であることを示せ．

3. $I=[0,1], f_n(x)=x^n\,(x\in I)\,,\,n\in\mathbb{N}$ とする．$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)\,(x\in I)$ とおく．
   すなわち，$f(x)$ は函数列 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ の各点収束極限函数．このとき以下を示せ．

   (a) $f(x)$ は I 上連続函数ではない．

   (b) 函数列 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ は I 上 $f(x)$ に一様収束しない（2. を用いず直接示せ.）

4. 連続函数列 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ は各点収束極限函数 $f(x)$ を持つが，$f(x)$ が連続函数にならない（ただし 3. とは違う）例を作れ.

問題について一言

諏訪先生の特別講義「数学の理解のアート第 6 回」で扱われた問題です．解答をお待ちしております.

宛先と締切

宛先　kuwanodojo@googlegroups.com

締切　2022 年 12 月 31 日（土)

(郵送される場合は数学工房オフィスまでお願いいたします)

数学工房　2022 年 10 月 21 日発行
発行人　桑野耕一
編集人　増田卓、坂口尚文、半田伊久太

連絡先
オフィス電話：042-495-6632
数学工房連絡用携帯：080-6576-2691
連絡は極力 e-メールでお願いします。
e-mail：sugakukobo@w5.dion.ne.jp
e-mail：monteverdi2007@ezweb.ne.jp

公式ホームページ
http://www.sugakukobo.com/
数学工房教室
〒 170-0003
東京都豊島区駒込 1-40-4
全国蕎麦製粉会館 2F　202・203
数学工房オフィス
〒 204-0023
東京都清瀬市竹丘 1-17-26-401