# 数学工房会報

2023年
No.141

## 巻　頭　言

知人や会員の方から知り合いの、数学に関心のある高校生や受験生、大学生に良い副読本はないかとご相談をいただくことがしばしばあります。最近も数学の研究者志望の大学１年生に良い副読本はないかということで、お聞きした学生さんの状況と興味を踏まえて、解析数論系のセンスの良い入門書を２冊ばかり、推薦しました。既に高度な素養を持っている場合は別ですが、一般には、このような良書を丁寧に読みながら、学校での微積分や、線形代数のような基礎科目を学んでいくのが良いと思います。授業を一生懸命に聞きいわゆる教科書を学び、いくら頑張って演習問題を解いたところで、数学の世界と出会うのは難しい。それどころか、生きた数学の世界を歩く道具にもならないでしょう。目前の試験には役立つかもしれませんが。優れた入門書を読むと様々な風景を楽しみながら、どうやって基本的な知識を使いこなすのか、山や野の歩き方川や海の渡り方迷路の抜け方、道具の整え方、手入れの仕方を教えてくれます。こうして式の取り扱いや推論のセンスを磨いていくわけです。これが最も肝心なことですが、数学の方向性についての良い感覚、趣味、審美眼を養うのです。数学を研究するにせよ、応用するにせよたくさんの文献に目を通すことになりますが、その時は価値判断の物差しの準備になります。本来は、このような本は、これから数学をやるのだという若い学生さんに推薦するものですが、数学を志すという意味では会員の皆さんも遅くはありません。数学工房の皆さんの場合、私が一番感じるのは、高度な内容のものまで努力して学びたい、その様な意欲はとても貴重だと思います。ただ残念なことにその世界を歩けるセンスと技量体力はなかなか身につかないのが実情です。そのような感覚や力は最も基本的な良書を学ぶことである程度養えると思います。そこで、今回は皆さんの手助けになりそうなしかも手に入りやすい、センスの良い良書を２冊紹介しましょう。興味のある方は是非とも手にとって見てください。

(1) 『ベルヌーイ数とゼータ関数』 荒川恒男・伊吹山知義・金子昌信 牧野書店

(2) 『実関数と Fourier 解析 1, 2』 高橋陽一郎 岩波講座 現代数学の基礎 岩波書店

(1) は Bernoulli 数と Zeta 関数という切り口から書かれたあまり類をみない面白い整数論の入門書です。著者によれば、アマチュアにもプロにも楽しんでもらいたいという願いで書いた、と述べています。本書は 14 章からなり様々な難易度のトピックスからできています。おおまかに言って、1-7 章は面白い切り口からの整数論入門、私自身の事を言えば、抽象線形代数の練習問題の貴重な種本として使わせていただきました。8 章以降は解析学の立場から見ても刺激的でとても興味深いと思います。(2) は高橋先生の力作で本書は 2 分冊で 8 章からなり、ごく基礎的なことから発展的な事まで触れています。初学者のことを考慮していて、Lebesgue 積分論は用いていません。第 2 分冊 5 章実関数の性質はとても参考になるし、個人的には特に楽しいのは、第 7 章 Fourier 変換の応用と、第 8 章関連する話題でした。興味あるトピックスから読まれれば良いと思います。微積分、初等解析から関数解析的技巧への導入が見事です。ここで扱われているのは関数解析の故郷です。数学は、本来神話や詩、音楽などと親近性が高いものです。優れた著作や論文、講義は、数学の語り方、謡い方を教えてくれます。そのリズムや音色でご自分に合ったものを見つけると良いでしょう。

数学工房 桑野耕一 2023 年 夏学期

# 夏学期講座案内 2023年 5~8月

## 入門・初級

- ♦ IA 解析教程（完全版）数直線

  0. 代数的概念
  1. Weierstrass の完備性公理、上限、下限
  2. 数列と数列の収束
  3. 数直線の完備性

  – 隔週日曜全 3 回 13:30–17:30
  – 5/14、5/28、6/11

- ♦ IB 複素関数論 IV 初等超越関数

  0. 周期連続関数と周期加群、Euler の指数関数
  1. cos 関数、sin 関数
  2. 複素対数関数
  3. 冪型関数
  4. 無限積

  – 隔週土曜全 3 回 13:30–17:30
  – 7/8、7/22、8/5

- ♦ EC 関数解析の演習 I 一般添え字の級数

  1. ネットの収束と一般添え字の級数
  2. 複素数値一般添え字の級数
  3. Hilbert 空間の完全正規直交系

  – 隔週日曜全 3 回 13:30–17:30
  – 7/2、7/16、7/30

- ♦ G 抽象線型代数への招待 VIII

  1. 正規作用素と展開定理
  2. スペクトル定理
  3. 関数算法

  – 隔週日曜全 3 回 13:30–17:30
  – 5/21、6/4、6/18

## 初・中級

- ♦ IS 特別講座 数学理解の技法

  詳細については、しばらくお待ちください。※不定期 読切 検討中

- ♦ MA Von Neumann 代数

  1. Banach 両側加群、双対両側加群
  2. $C^*$ 代数の第 2 双対の V.N.A 構造
  3. $W^*$ 代数

  – 隔週日曜全 3 回 13:30–17:30
  – 7/9、7/23、8/6

## 中級

- ♦ IC 局所コンパクト群の表現

  1. Banach* 代数の表現、まとめ
  2. Gelfand-Raikov の定理

  – 隔週日曜全 6 回 10:30–12:30
  – 5/21、6/4、6/18、7/2、7/16、7/30
  – オンライン受講可

- ♦ MB $C^*$-代数のテンソル積

  0. Spatial ノルムの最小性
  1. 核型 $C^*$-代数と完全系列
  2. Complete positivity と核型 $C^*$-代数
     (0) Introduction 正定値関数
     (1) $M(n\ A)$
     (2) $M(n\ A^*)$ の順序
     (3) 完全正写像の概念
     (4) 補遺 V.N.A の正規線型作用素と完全加法性
     (5) Stinespring の定理
     (6) いくつかの結果
     (7) 完全正写像による核型の特徴付け

  – 隔週土曜全 3 回　13:30–17:30
  – 5/13、5/27、6/10
  – オンライン受講可

**講座料について**

各講座、税込￥32,000(学割￥25,000) です。オンラインの場合　￥25,000 (ただしオンライン受講可能な場合) 途中参加の場合、
・3 回講座は、1、2 回目¥ 12,000(学割 ¥ 9,000)、3 回目¥ 10,000(学割 ¥ 9,000) です。
・6 回講座は、1 回目¥ 6,500(学割 ¥ 6,000)、2 回目以降¥ 5,500/回 (学割 ¥ 4,000/回) です。
・オンラインの場合は、各回¥ 9,000 です。

講座、研究会等に御参加いただくには今年度の数学工房の年会費が払込み済みであることが必要です。

・銀行口座: 三井住友銀行 清瀬支店 普通預金 口座番号 4585253 数学工房 桑野耕一
・郵便振替: 00150-9-686515 数学工房

# 会員からのメッセージ

会員の新井良明さんにメッセージを寄稿してもらいました。

皆様いかがお過ごしでしょうか。この度、自己紹介を兼ねて寄稿させていただくという機会をいただきましたので、少し文章を書かせていただきました。数学工房にお邪魔してから今月で 3 年になります。毎月数学工房という空間で数学を楽しまれている方達と共に楽しい時間を過ごしています。

私は数学科の出身であり、物理学科の出身でもあります。我が師達や彼らの師達との付き合いで、日本ではリーマン面とそのモジュライ空間、写像類群と群のコホモロジーに出会い、複素多様体の変形理論を経由して代数幾何学へ移行し、シンプレクティック幾何学へ足を踏み入れました。アメリカでは物理学で必要最小限な専門書を読破し、QED や Black Hole の計算に明け暮れていました。その後リーマンショックが起こり、急遽アメリカから帰国し生活のために日本で仕事をするようになったのですが、帰国後結構な時間が経ちました。アメリカでの我が師達との日々は、日本での生活より一層体力と本能に特化したものでした。周りに長年の知り合いはいないし、日本人すら見かけない。ひたすら計算する毎日でした。単にアメリカの風土があっていたのか、日本の大学にいた頃より楽しく過ごせました。こんな経験ができたのは、今や年老いてしまった両親のお陰です。3 年前田舎から上京して同居を始めました。毎日の生活が落ち着いてきた頃、インターネットで見つけたのが数学工房です。仕事で高大連携を意識した数学Ⅲの授業をしたり大学受験の指導をしたりすることにウンザリしながら、でも解析学は面白いと感じていた時期でもありました。


新井良明さん

私は解析学、特に作用素環は名前しか知らない素人です。そんな私でも数学工房の輪講で作用素環の諸定理をながめていると、我が師達が「論理展開とは、一滴の水も漏れない砂の器を作ることです」や、「数学は一言で言えるのがよいのです」などと口うるさく言っていたあの頃が懐しく思い出されます。かつて学んだ数学や物理と同質のものにふれているからでしょう。これこそ数学だと思う瞬間は、私にとって数学の美しさを垣間見たときです。論理の本質が自然に姿を現す瞬間です。人工建造物に埋め尽くされた都会の片隅に咲く花を見つけたときの感動に近いものがあります。無機質なものの存在感を無くしてしまうほどの生命力が独特の美を生んでいる情景に、ただただ畏敬の念を抱くのです。数学の美という花は萎れることなく一生心の中に咲き続けます。いつでも思い出すことができるのです。

この寄稿は、これまで私は数学と共に歩んできたのだと再認識する機会となりました。最近複素シンプレクティック代数多様体の本を見つけました。作用素環とは種類の違う数学ではありますが、特異点の扱いが気になります。どのような数学が展開されているのか期待しながら読んでみようかと思っています。

入門　桑野道場　（第51回）

//記　桑野道場師範代　半田伊久太//

# 前回の問題

## 定義

$\{f_n\}_{n\geq 0}$を区間 $I$ における函数列, $f$ を区間 $I$ 上の函数とする.
任意の実数 $\varepsilon > 0$ に対して $N > 0$ が存在して, $n \geq N$ なら各 $x \in I$ に対して
$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ となるとき，函数列 $\{f_n\}_{n\geq 0}$ は区間 I において $f$ に
一様収束をするという.

## 問題

1. 区間 $I$ 上の函数列 $\{f_n\}_{n\geq 0}$ が与えられたとき，次は同値であることを示せ.
   (a) 函数列 $\{f_n\}_{n\geq 0}$が $I$ において $f$ に一様収束する.
   (b) $\sup\{|f_n(x) - f(x)| \colon x \in I\} \to 0\,(n \to \infty)$.
2. $\{f_n\}_{n\geq 0}$を区間 $I$ における連続函数の列 とする.
   函数列 $\{f_n\}_{n\geq 0}$が区間 $I$ において函数 $f$ に一様収束するなら, $f$ もまた区間 $I$ において連続であることを示せ.
3. $I = [0, 1], f_n(x) = x^n\,(x \in I)\,, n \in \mathbb{N}$ とする．$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,(x \in I)$ とおく.
   すなわち，$f$ は函数列 $\{f_n\}_{n\geq 1}$ の各点収束極限函数．このとき以下を示せ.
   (a) $f$ は $I$ 上連続函数ではない.
   (b) 函数列 $\{f_n\}_{n\geq 1}$ は $I$ 上 $f$ に一様収束しない（2. を用いず直接示せ.）
4. 連続函数列 $\{f_n\}_{n\geq 1}$ は各点収束極限函数 $f$ を持つが，$f$ が連続函数にならない（ただし 3. とは違う）例を作れ.

## 解答

区間 $I$ と函数 $g : I \to \mathbb{R}$ が与えられたとき，以下

$$\|g\|_I := \sup\{|g(x)| : x \in I\}$$

と記す.

1. (a) $\Rightarrow$ (b)
   仮定より $\forall\varepsilon > 0\,\exists N \geq 0$ s.t. $N \leq n \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ for $\forall x \in I$.
   よって，$N \leq n \Rightarrow \|f_n - f\|_I = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in I\} \leq \varepsilon$.
   したがって，$\|f_n - f\|_I = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in I\} \to 0\,(n \to \infty)$.
   (b) $\Rightarrow$ (a)

仮定より $\forall\varepsilon > 0\,\exists N \geq 0$ s.t. $N \leq n \Rightarrow \|f_n - f\|_I = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in I\} < \varepsilon$.

よって，$N \leq n \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_I < \varepsilon$ for $\forall x \in I$．したがって，関数列 $\{f_n\}_{n\geq 0}$ は $I$ において $f$ に一様収束する．

2. $\{f_n\}_{n\geq 0}$ が区間 $I$ において $f$ に一様収束するので，

$$\forall\varepsilon > 0\,\exists N \geq 0 \text{ s.t. } N \leq n \Rightarrow \|f_n - f\|_I < \varepsilon/3.$$

任意に $x_0 \in I$ をとる．$f_N$ は $x_0$ で連続なので

$$\exists\delta > 0 \text{ s.t. } x \in I \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow |f_N(x) - f_N(x_0)| < \varepsilon/3.$$

よって $x \in I \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ならば

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq 2\|f_N - f\|_I + |f_N(x) - f_N(x_0)| \\ &< \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

したがって $f$ は $x_0 \in I$ で連続．$x_0 \in I$ は任意なので $f$ は $I$ において連続．

3. (a)

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & (\,0 \leq x < 1\,) \\ 1 & (\,x = 1\,) \end{cases}$$

より明らかに $f$ は $I$ 上 連続函数でない．

(b) 2. によれば連続函数列の一様収束極限函数はまた連続函数である．極限函数は連続函数でないので一様収束していないことは明らかであるが，2. を使わないで示す．
$n \in \mathbb{N}$ に対して，$g_n(x) := |f_n(x) - f(x)|\,(x \in I)$ とおく．

$$g_n(x) = \begin{cases} x^n & (\,0 \leq x < 1\,) \\ 0 & (\,x = 1\,) \end{cases}$$

である．よって
$\|g_n\|_I = \|f_n - f\|_I = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in I\} = \sup\{x^n : 0 \leq x < 1\} = 1$.
したがって「$\|f_n - f\|_I \to 0\,(n \to \infty)$」とならない！
すなわち，函数列 $\{f_n\}_{n\geq 1}$ は $I$ 上 $f$ に一様収束しない．

4. $I = [0, 1]$ とし，$n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$f_n(x) = \begin{cases} -(n+1)x + 1 & (\,0 \leq x \leq \frac{1}{n+1}\,) \\ 0 & (\,\frac{1}{n+1} \leq x \leq 1\,) \end{cases}$$

とする．

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & (x = 0) \\ 0 & (0 < x \leq 1) \end{cases}$$

である．よって，任意の $n \in \mathbb{N}$ については $f_n$ は $I$ 上連続だが，極限関数 $f$ は連続函数ではない．

## 今回の問題

$M_n(\mathbb{C})$ は複素数を成分とする $n$ 次正方行列全体の集合とする．

1. $A=(\alpha_{ij})_{1\le i,j\le n}\in M_n(\mathbb{C})$ に対して，以下のように定義する．

$$\|A\|_\infty := \max_{1\le i,j\le n}|\alpha_{ij}|,\ \|A\|_{OP} := \sup\{\|Ax\| : x\in\mathbb{C}^n,\ \|x\|=1\},$$
$$\|A\|_1 := \sum_{1\le i,j\le n}|\alpha_{ij}|,\ \|A\|_2 := \sqrt{\sum_{1\le i,j\le n}|\alpha_{ij}|^2}$$

このとき、任意の $A\in M_n(\mathbb{C})$ に対して，以下の不等式が成り立つことを示せ．

$$\|A\|_\infty \le \|A\|_{OP} \le \|A\|_2 \le \|A\|_1 \le n^2\|A\|_\infty.$$

2. (a) $M_n(\mathbb{C})\times M_n(\mathbb{C})\ni(A,B)\mapsto \mathrm{trace}(B^*A)\in\mathbb{C}$ が内積であることを示せ．
ただし，$A=(\alpha_{ij})_{1\le i,j\le n}\in M_n(\mathbb{C})$ に対して
$A^* := \overline{A^T}$（Aの共役転置行列)，$\mathrm{trace}(A) := \sum_{i=1}^n \alpha_{ii}$（Aの対角和）を表すものとする．
(b) リースの表現定理を述べよ．
(c) $M_n(\mathbb{C})$ の双対空間に内積を入れよ．

## 問題について一言

IC（局所コンパクト群の表現）で類似の問題をやりました．解答をお待ちしております．

## 宛先と締切

宛先　kuwanodojo@googlegroups.com

締切　2023 年 8 月 31 日（木)

(郵送される場合は数学工房オフィスまでお願いいたします)


数学工房　2023 年 6 月 21 日発行
発行人　桑野耕一
編集人　増田卓、坂口尚文、半田伊久太



連絡先
オフィス電話：042-495-6632
数学工房連絡用携帯：080-6576-2691
連絡は極力 e-メールでお願いします。
e-mail：sugakukobo@w5.dion.ne.jp
e-mail：monteverdi2007@ezweb.ne.jp

公式ホームページ
http://www.sugakukobo.com/
数学工房教室
〒 170-0003
東京都豊島区駒込 1-40-4
全国蕎麦製粉会館 2F　202・203
数学工房オフィス
〒 204-0023
東京都清瀬市竹丘 1-17-26-401