Math.
No. 142
www.sugakukobo.com

会報 2023 年 11 月

数学工房

2023 年 秋 巻 頭 言

会報夏学期号で高橋陽一郎先生の「実関数と Fourier 解析１・２」を紹介しました。Fourier 解析という純粋、応用の多くの分野が交差する、例えば複素解析、数論、微分方程式、関数解析学、物理学など最も豊かな深い世界です。そこに現れるとても美しい、鑑賞するだけでもうっとりする結果がたくさんあります。この冊子の着想のもとになったと思われるのが T.W. ケルナー「フーリエ解析大全」高橋陽一郎訳　朝倉書店です。著者は大学で微積分をひと通り学んだ学生を対象にして「フーリエ解析における概念と手法、そしてエレガントな諸結果の展示室」を意図したと述べています。本書は、熱、波、ポテンシャルといった、Fourier 解析の定番の分野はもとより、非線形振動、解析数論，統計学等の問題も含み，また地球の年齢や海底電線のトピックス、論文におけるデータの捏造の事例まで含むゆったりと読むに良い面白いトピックスがいっぱい載っている数学的エッセイです。私はドラマでしか知りませんが、イギリスの名門大学でのカレッジでの雑談を思い起こさせる雰囲気です。この本は気張らず、興味のある章をじっくりと味うと良いでしょう。

Fourier 解析の美しさ神秘、奥深さを充分に味わうことができたら、次のステップとして、お薦めするのは、もし、学部の標準的な代数、トポロジー、測度論の基礎コース、Banach-* 代数や C^* 代数の基礎を含む関数解析の基礎コースを習得済みなら、W.Rudin の「Fourier Analysis on Groups」インターサイエンス社の純粋および応用数学双書の 1 冊として手ごろな値段で出ています。本書は第 1 章だけでもワクワクしますよ。古典的な Fourier 解析の美しい神秘的な諸定理が可換局所コンパクト群上の可積分関数の空間からその双対上の連続関数空間への Gelfand 変換という形で定式化され、Fourier 解析 1,2 に取り上げられている美しく多様な結果が可換局所コンパクト群とその双対という統一的な枠組みに収まっていきます。数学工房の中級以上の講座は大まかに言って、Fourier 解析の発展編です。だから面白いし空虚な一般化ではないのです。関数解析の先の方を学ばれている方にとってもご自身が何をやっているかを理解する指針になると思います。標語的にまとめれば、「審美眼を養うことなしに、いかに努力し学んでも真の理解に到達することは難しい。」

最後になりましたが、時折アナウンスしているように、数学工房駒込教室は 2025 年 3 月に閉じる予定です。ここからは、ペースが落ちるかもしれませんが、私の体がもつ限りは可能な講座はオンラインで続けるつもりです。場所立地が良いので教室を居抜きで引き継いで何かやりたい方がいらっしゃればご相談ください。

2023 年　秋　数学工房　桑野耕一

秋 学 期 講 座 案 内

2023 年 9 月〜 12 月

2023 年秋学期講座は IC, MA, および MB の 3 講座がオンラインでの受講が可能となっています。

<< 秋学期講座一覧 >>

略号	講座名	講座開始日	オンライン可
I.A	解析教程 II	9 月 10 日	
I.B	複素関数論	11 月 4 日	
I.C	局所コンパクト群の表現	9 月 17 日	○
G	無限次元線型空間	9 月 17 日	
E.D	関数解析演習	10 月 29 日	
M.A	Banach*-代数と C^*-代数の表現	11 月 5 日	○
M.B	核型 C^*-代数と完全正写像	9 月 9 日	○

◆ I.A 解析教程 II　完備性　連続関数

＜３＞ 数直線の完備性
1. 単調増加列、基本的な列
2. 区間縮小法、Weierstrass-Bolzano の定理
3. Cauchy 完備
4. 点列コンパクト
＜４＞ 連続関数
1. 基本的な定義と性質
2. 連続関数環
3. 関数の極限
4. 局所定数関数と区間
5. 連続関数の３つの基本定理
　9/10 より隔週３回 (9/10, 9/24, 10/8)

◆ I.B　複素関数論　Cauchy 理論 I

Cauchy の積分定理、積分公式は数学の諸定理の中で最も重要で有用な定理の一つである。応用の豊かさはもとより、数学の諸分野に与えた影響も大きい。今回は局所理論を扱う。
1. 複素積分
2. Cauchy の積分定理
3. 正則関数の基本定理
　11/4 より隔週３回 (11/4, 11/18, 12/2)

◆ I.C　局所コンパクト群の表現

1. Gelfand-Raikov の定理
2. 繋絡作用素
3. 局所コンパクト群上の正定値関数と巡回表現
　9/17 より隔週６回 (9/17, 10/1, 10/15, 10/29, 11/12, 11/26)

◆ G　抽象線型代数 (Advanced course)

(1) ２つの標準空間
(2) 線形空間の直積、直和
(3) 線形空間の内部演算、span、独立、従属、基底
(4) 基底の存在、座標空間、双対とその表現
　9/17 より隔週３回 (9/17, 10/1, 10/15)

◆ E.D　Hilbert 空間の基礎構造

1. 内積空間とその双対、Hilbert 空間
2. 完全正規直交系の存在と特徴づけ
3. 内積空間の完備化
4. 弱位相
　10/29 より隔週３回 (10/29, 11/12, 11/26)

◆ M.A　Banach*-代数と C^*-代数の表現

　解析の諸分野や局所コンパクト群の表現などへの具体的応用を考えると Banach*-代数の表現を先ず考えそれから C^*-代数の表現を考えた方が好都合である。Von Neumann 代数や Banach*-代数,C^*-代数の基本事項は既知とする。

＜０＞ 序論
＜１＞ Banach*-代数の正線型形式
＜２＞ Banach*-代数の*表現
＜３＞ 純粋状態と既約表現
＜４＞ Banach*-代数の表現と正線型形式
＜５＞ Banach*-代数における既約表現の存在

　11/5 より隔週３回 (11/5, 11/19, 12/3)

◆ M.B　完全正写像と完全有界写像

1. 順序線型空間と正写像
2. C^*-代数の行列環の正元
3. 作用素空間、作用素系の完全有界写像、完全正写像、完全縮小写像
4. ３つのタイプの写像の関係
　9/9 より隔週３回 (9/9, 9/23, 10/7)

[料金]
通常講座
一括前納 ￥32,000（学割￥25,000）
各回払い ３回のセミナー　１、２回目￥12,000（学割￥9,000）　３回目￥10,000（学割￥9,000）
６回のセミナー　１回目￥6,500（学割￥6,000）
２回目以降￥5,500（学割￥4,000）
オンライン受講
一括前納 ￥25,000
各回払い ￥9,000/回

会員からのメッセージ

■　ただいま博士課程で奮闘中！（范揚武）

　会員の范揚武です。早いもので、会員になって 20 年以上になります。10 年程前から長野県で小さな数学教室をしています。ちゃんと身に付いていないところが多くありますが、工房で学んだことが私の数学の基礎になってくれたおかげで社会人として修士課程に入り、昨年修了できました。現在、無謀にも博士課程に進んでいます。博士課程に進んで感じたことや再認識したこと、その他諸々について書かせていただきます。テーマがあるわけではないので締ま

りのない話になるかもしれませんがご容赦下さい。

ご存知だと思いますが、博士課程では「論文作成すること」が目標になります。もちろん、その奥には研究者として自立できることという目的があります。そのためには、時間内にできそうな論文の材料を見つけなくてはなりません。

これが結構なプレッシャーになります。特に理解できる事、楽しめることを目的にして、気ままに自分のペースで勉強してきた私には。すると、テキスト等を読むときの読み方が、よい面でとそうでない面で変わってきたように思います。一つは、私が稽古不足なのですが、論文作成が目の前の課題となると、材料を探すために勉強するという要素がどうしても入ってしまい、本質が見えなくなることがあります。二つ目は、自分が思いついたことは、漠然とした状態のままでは材料になりうるかわからないのもあって、できるだけ定式化を試みなければなりません。言うは易すしで、「思いついたことは定式化するように」と指導してもらいながらやっています。これは、良いことで、全くの勘違いだったということも含めて、定式化を試みてようやく気がつくことが多くあります。

今は、このような感じで材料を探しながら勉強をしています。ところで、論文まで辿り着けるか不安に思いながら、工房の講座に参加し、あるいは工房での講座のノートを見直すと、先生の講座は、全体的には、定理等の取捨選択、論理構成その他随所に工夫がされていて、目的とそれに向かう大きな流れがクリアーになっていることに気が付きます。そして、時には考える価値がありそうな問題提起もあり、まさに今自分が取り組んでいることの手本があるように見えてきます。そして、それは論文作成などが目標ではない分、本来の、いや正確には自分が思うところの、数学の姿に近いはずです。逆に言うと、今まではそれがちゃんと見えていなかった！と同時に自分は工房での数学が純粋に楽しいのだと再発見できました。

修士を終えた後は、もう少しやりたいと言う漠然とした気持ちで博士に進み、その先は全く考えていなかったけれど、何をしたいのかが、なんとなく分かってきた気がします。言葉ではうまく言えませんが、自分は数学との付き合い方を探していたのではないだろうか。そして、個々の感性や技術はもちろんですが、この先どのように数学をしたいのかについても工房から学ぶところは極めて大きいのだと。また、今博士課程で技術を磨くことは、そのためにも有益なのだと思います。

なんだか、今の自分の最近の心境を書いたようになってしまいましたが、気持ちを新たに数学していきたいと思います。桑野先生はじめ会員の皆様、今後ともどうぞよろしくお願いいたします。

写真　范揚武さん

入門桑野道場（第 52 回）

/// 記　桑野道場師範代　半田伊久太 ///

前回の問題

$M_n(\mathbb{C})$ は複素数を成分とする n 次正方行列全体の集合とする．

1. $A = (\alpha_{ij})_{1\le i,j\le n} \in M_n(\mathbb{C})$ に対して，以下のように定義する．

$$\|A\|_\infty := \max_{1\le i,j\le n} |\alpha_{ij}|,\ \|A\|_{OP} := \sup\{\|Ax\| : x \in \mathbb{C}^n,\ \|x\| = 1\},$$

$$\|A\|_1 := \sum_{1\le i,j\le n} |\alpha_{ij}|,\ \|A\|_2 := \sqrt{\sum_{1\le i,j\le n} |\alpha_{ij}|^2}$$

このとき，これらはそれぞれノルムになり，任意の $A \in M_n(\mathbb{C})$ に対して，以下の不等式が成り立つことを示せ．

$$\|A\|_\infty \le \|A\|_{OP} \le \|A\|_2 \le \|A\|_1 \le n^2\|A\|_\infty.$$

2. (a) $M_n(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C}) \ni (A, B) \mapsto \mathrm{trace}(B^*A) \in \mathbb{C}$ が内積であることを示せ．

ただし，$A=(\alpha_{ij})_{1\le i,j\le n}\in M_n(\mathbb{C})$ に対して
$A^*:=\overline{A^T}$（Aの共役転置行列），$\mathrm{trace}(A):=\sum_{i=1}^n \alpha_{ii}$（Aの対角和）を表すものとする．
（b）リースの表現定理を述べよ．
（c）$M_n(\mathbb{C})$ の双対空間に内積を入れよ．

解答

$A=(\alpha_{ij})_{1\le i,j\le n}$ とする．また，$\{e_1,\ldots,e_n\}$ を $\mathbb{C}^n$ の標準基底とする．
ただし，$e_i(1\le i\le n)$ は n 次元列ベクトル．さらに $\alpha_{ij}=\langle Ae_j,e_i\rangle\,(1\le i,j\le n)$ に注意する．

1. • $\|A\|_\infty\le\|A\|_{OP}$ であること．

$$\begin{aligned}|\alpha_{ij}|=|\langle Ae_j,e_i\rangle|&\le\|Ae_j\|\|e_i\|=\|Ae_j\|\\&\le\sup\{\|Ax\|:x\in\mathbb{C}^n,\|x\|=1\}=\|A\|_{OP}\,(1\le i,j\le n).\end{aligned}$$

よって $\|A\|_\infty=\max_{1\le i,j\le n}|\alpha_{ij}|\le\|A\|_{OP}$.

• $\|A\|_{OP}\le\|A\|_2$ であること．
任意の $x\in\mathbb{C}^n(\|x\|=1)$，$\xi_i:=\langle x,e_i\rangle\,(1\le i\le n)$ とおく．

$$\begin{aligned}Ax=A\left(\sum_{i=1}^n\xi_ie_i\right)&=\sum_{i=1}^n\xi_iAe_i=\sum_{i=1}^n\xi_i\sum_{j=1}^n\langle Ae_i,e_j\rangle e_j\\&=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\alpha_{ji}\xi_ie_j=\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n\alpha_{ij}\xi_j\right)e_i\end{aligned}$$

ここで Cauchy の不等式を用いると，

$$\begin{aligned}\|Ax\|^2=\sum_{i=1}^n\left|\sum_{j=1}^n\alpha_{ij}\xi_j\right|^2&\le\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n|\alpha_{ij}||\xi_j|\right)^2\le\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n|\alpha_{ij}|^2\right)\left(\sum_{j=1}^n|\xi_j|^2\right)\\&=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n|\alpha_{ij}|^2=(\|A\|_2)^2.\end{aligned}$$

$x\in\mathbb{C}^n(\|x\|=1)$ は任意だから $\|A\|_{OP}=\sup\{\|Ax\|:x\in\mathbb{C}^n,\|x\|=1\}\le\|A\|_2$.

• $\|A\|_2\le\|A\|_1$ であること．

$$\begin{aligned}(\|A\|_1)^2=\left(\sum_{1\le i,j\le n}|\alpha_{ij}|\right)^2&=\sum_{1\le i,j,i'.j'\le n}|\alpha_{ij}||\alpha_{i'j'}|\\&=\sum_{1\le i,j\le n}|\alpha_{ij}|^2+\sum_{(i,j)\ne(i',j')}|\alpha_{ij}||\alpha_{i'j'}|\\&\ge\sum_{1\le i,j\le n}|\alpha_{ij}|^2=(\|A\|_2)^2.\end{aligned}$$

よって $\|A\|_2\le\|A\|_1$.

• $\|A\|_1\le n^2\|A\|_\infty$ であること．

$$\|A\|_1=\sum_{1\le i,j\le n}|\alpha_{ij}|\le\max_{1\le i,j\le n}|\alpha_{ij}|\sum_{1\le i,j\le n}=n^2\|A\|_\infty.$$

2.（a）$A,B\in M_n(\mathbb{C})$ に対して，$\langle A,B\rangle:=\mathrm{trace}(B^*A)$ とおく．
$*$ と trace に関する以下の性質は容易にわかる．
$A,B\in M_n(\mathbb{C})$ と $\alpha\in\mathbb{C}$ が与えられたとき，

- $A^{**} = A,\ (A+B)^* = A^* + B^*,\ (\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^*,\ (AB)^* = B^* A^*.$
- $\mathrm{trace}(A+B) = \mathrm{trace}(A) + \mathrm{trace}(B),\ \mathrm{trace}(\alpha A) = \alpha\,\mathrm{trace}(A),$
  $\mathrm{trace}(A^*) = \overline{\mathrm{trace}(A)},\ \mathrm{trace}(AB) = \mathrm{trace}(BA).$

以上により $\langle , \rangle$ の左 $\mathbb{C}$-線型性はすぐわかる．
$A, B \in M_n(\mathbb{C})$ に対して

$$\langle B, A\rangle = \mathrm{trace}(A^* B) = \mathrm{trace}(A^* B^{**}) = \mathrm{trace}((B^* A)^*) = \overline{\mathrm{trace}(B^* A)} = \overline{\langle A, B\rangle}.$$

また，$A = (\alpha_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbb{C})$ に対して，

$$\langle A, A\rangle = \mathrm{trace}(A^* A) = \mathrm{trace}(\overline{A^T} A) = \sum_{1\leq i,j\leq n} \overline{\alpha_{ij}}\alpha_{ij} = \sum_{1\leq i,j\leq n} |\alpha_{ij}|^2 = (\|A\|_2)^2 \geq 0.$$

さらに，$\langle A, A\rangle = 0 \Rightarrow \|A\|_2 = 0 \Rightarrow A = \boldsymbol{O}_{M_n(\mathbb{C})}$.
以上により $\langle , \rangle$ は $M_n(\mathbb{C})$ 上の内積である．

(b) $M_n(\mathbb{C})$ の双対空間を $M_n(\mathbb{C})^*$ とする．
すなわち，$M_n(\mathbb{C})^* := \{\Phi : M_n(\mathbb{C})^* \to \mathbb{C} \,|\, \Phi$ は $\mathbb{C}-$ 線型形式 $\}$.

リースの表現定理

任意の $\Phi \in M_n(\mathbb{C})^*$ に対して以下の条件を満たす $\nabla\Phi \in M_n(\mathbb{C})$ が唯一存在する：

$$\Phi(A) = \langle A, \nabla\Phi\rangle \text{ for } \forall A \in M_n(\mathbb{C})$$

(c) $\nabla : M_n(\mathbb{C})^* \ni \Phi \to \nabla\Phi \in M_n(\mathbb{C})$ とすると，∇ は全単射で，
$\Phi_1, \Phi_2, \Phi \in M_n(\mathbb{C})$ と$\alpha \in \mathbb{C}$ に対して

$$\nabla(\Phi_1 + \Phi_2) = \nabla(\Phi_1) + \nabla(\Phi_2)$$
$$\nabla(\alpha\Phi) = \bar{\alpha}\nabla(\Phi)$$

を満たす．よって $\Phi, \Psi \in M_n(\mathbb{C})^*$ に対して
$\langle \Phi, \Psi\rangle_{M_n(\mathbb{C})^*} := \overline{\langle \nabla\Phi, \nabla\Psi\rangle}$ と定義すれば，$\langle \Phi, \Psi\rangle_{M_n(\mathbb{C})^*}$ は $M_n(\mathbb{C})^*$ の内積である．
実際，$\langle , \rangle_{M_n(\mathbb{C})^*}$ が内積であることは $\langle , \rangle$ が $M_n(\mathbb{C})$ 上の内積であることからわかる．
$\Phi, \Psi \in M_n(\mathbb{C})^*$と$\alpha \in \mathbb{C}$ に対して，$\langle \alpha\Phi, \Psi\rangle_{M_n(\mathbb{C})^*} = \alpha\langle \Phi, \Psi\rangle_{M_n(\mathbb{C})^*}$ のみチェックする．実際，

$$\langle \alpha\Phi, \Psi\rangle_{M_n(\mathbb{C})^*} = \overline{\langle \nabla(\alpha\Phi), \nabla(\Psi)\rangle} = \alpha\overline{\langle \nabla(\Phi), \nabla(\Psi)\rangle} = \alpha\langle \Phi, \Psi\rangle_{M_n(\mathbb{C})^*}$$

今回の問題

実数列 $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ が与えられたとき，φ の上極限 $\overline{\lim}\,\varphi$ と下極限 $\underline{\lim}\,\varphi$ を次のように定義する．

$$\overline{\lim_n}\,\varphi(n) := \lim_{n\to\infty}(\sup_{\nu\geq n}\varphi(\nu)),\quad \underline{\lim_n}\,\varphi(n) := \lim_{n\to\infty}(\inf_{\nu\geq n}\varphi(\nu)).$$

実数列 $\{\sup_{\nu\geq n}\varphi(\nu)\}_n$は単調減少，実数列 $\{\inf_{\nu\geq n}\varphi(\nu)\}_n$ は単調増加より，どちらも $[-\infty, +\infty]$ の範囲で極限を持つことに注意する．このとき，以下を示せ．

1. 実数列 $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ と $\gamma \in \mathbb{R}$ が与えられたとき以下は同値である．
   (a) $\gamma = \overline{\lim}_n\,\varphi(n)$
   (b)
   - 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\gamma + \varepsilon < \varphi(n)$ を満たす正整数 n は高々有限個．
   - $\theta(n) \to \gamma(n \to \infty)$ となる φ の部分列 $\theta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が存在する．
     （後者を満たすとき γ は実数列 φ の集積点と呼ばれる．）

(c) $\mathrm{Acc}(\varphi)$ を φ の集積点全体の集合するとき，$\gamma = \sup(\mathrm{Acc}(\varphi))$ である．

2. 実数列 $\varphi, \psi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ は $\varphi(n) \geq 0$ かつ$\psi(n) \geq 0\,(n \in \mathbb{N})$ を満たすとき，以下を示せ．

(a)

$$\varliminf_{n} \varphi(n) \varliminf_{n} \psi(n) \leq \varliminf_{n}(\varphi(n)\psi(n)) \leq \varliminf_{n} \varphi(n) \varlimsup_{n} \psi(n) \leq \varlimsup_{n}(\varphi(n)\psi(n)) \leq \varlimsup_{n} \varphi(n) \varlimsup_{n} \psi(n)$$

(b) $\gamma := \lim_{n\to\infty} \varphi(n) \in \mathbb{R}$ が存在するとき

$$\varlimsup_{n}(\varphi(n)\psi(n)) = \gamma \varlimsup_{n} \psi(n) = \lim_{n} \varphi(n) \varlimsup_{n} \psi(n)$$

ただし，(a), (b) において $0 \cdot +\infty$ 及び $+\infty \cdot 0$ の形のものは除く．

問題について一言

微積分の比較的初等的な問題です．解答をお待ちしております．

宛先と締切

宛先　kuwanodojo@googlegroups.com
締切　2023 年 12 月 31 日（日）
(郵送される場合は数学工房オフィスまでお願いいたします)

数学工房　2023 年 11 月 1 日発行
発行人　桑野耕一
編集人　増田卓、坂口尚文、半田伊久太

連絡先
オフィス電話：042-495-6632
数学工房連絡用携帯：080-6576-2691
連絡は極力 e-メールでお願いします。
e-mail：sugakukobo@w5.dion.ne.jp
e-mail：monteverdi2007@ezweb.ne.jp
公式ホームページ
http://www.sugakukobo.com/
数学工房教室
〒170-0003
東京都豊島区駒込 1-40-4
全国蕎麦製粉会館 2F　202・203
数学工房オフィス
〒204-0023
東京都清瀬市竹丘 1-17-26-401