数学工房会報

2024
No.143

巻　頭　言

NHK の BS でかなりマニアックな「英雄たちの選択」という番組が放映されているのをご存知ですか？時折、本当に目を開いてくれるようなことを教えてくれます。先日は「博物大名」という初めて聞く興味深いタイトルにひかれて録画したものを見ました。それによると、18 世紀西欧は、私たちの数学も含め科学技術大発展の時代で、特に植民地主義的拡張とも連動して、世界の各地の自然や地理、民族の暮らし、習俗、動植物等々博物学隆盛の時代でもありました。このような西欧の博物学の発展とは独立に、和算と同様、日本でも博物学のパイオニアともいうべき後世「博物大名」と呼ばれた好奇心旺盛な一群の大名たちが現れて、鳥類、魚類、昆虫の標本収集や調査など驚くべき精密かつ芸術的ともいうべき図鑑を作ることに情熱を傾けました。日本の博物学は独自に始まり発展を遂げ、情報交換のための身分を問わぬ学問コミュニティーができ、アマチュア研究者がたくさん生まれ研究会も活発だったそうです。明治維新の結果、日本は欧米の模倣に邁進し、実学の観点から西洋の諸制度や学問を丸ごと輸入して、日本流の学芸を学術に置き換えていったわけです。番組のホストの歴史学者磯田先生は番組の最後のコメントで、「学術から学芸へ回帰すること、学芸の精神を復活することは停滞するこの国の文化、社会を復興し豊かにすることになるのではないか？」と述べておられました。この指摘は今の日本が失いつつある学問や教育の豊かな土壌が何かを思い出させてくれます。すぐに世の中の役に立つ、利益になる、点数が稼げる、資格が取れるという発想で目先の知識を詰め込む、研究をすることがいかに日本を貧しく，つまらなくしたか。学びや研究の楽しさを知らない、あるいは伝えられない日本の公教育が貧相なのは当然のことなのです！

とはいうものの江戸時代以来の学術愛好の遺伝子は日本人の中に根強く残っている気がします。明治以後の日本人の優れた学問や芸術の活動には確かにそのようなものが働いていると感じさせるものも多いですね。振り返ってみると、数学工房がこれまでやってこられたのも、数学工房の会員さんには、学術愛好の遺伝子が残っている方が多いからでしょう。数学工房は江戸時代以来の学芸の伝統に連なっているのだと自覚した次第です。それでは今学期も数学をご一緒に掘り下げていきましょう。

数学工房 桑野耕一 2024 年 春学期

春学期講座案内

2024年
1〜4月

◆ IA 解析教程

1. 微分法 I
   (a) 微分可能性と基礎定理
   (b) 区間上の可微分函数、微分の平均値定理
   (c) 逆関数の微分可能性
2. Riemann 積分と微積分の基本定理
   (a) Riemann 積分の定義
   (b) Riemann 和と Darbox の定理
   (c) Riemann 積分の諸公式
   (d) 連続関数の積分
   (e) 微積分の基本定理

– 隔週日曜全 3 回 13:30–17:30

– 1/21, 2/4, 2/18

♦ IB 続 Cauchy 理論

0. 準備
1. Cauchy の積分定理、積分公式
2. Cauchy 変換と Cauchy-Taylor の表現定理
3. 正則性の特徴付け
4. 若干の応用

– 隔週土曜全 3 回 13:30–17:30
– 3/9, 3/23, 4/6

♦ IC 帯球関数

雛形は複素上半平面上の調和解析学である。

1. 帯球函数の定義と基本的な性質
2. クラス 1 表現
3. 帯球函数の Fourier 変換
4. 帯球函数の構成
5. Pontjagin の双対定理

– 隔週日曜全 6 回 10:30–12:30
– 1/14, 1/28, 2/11, 3/3, 3/17, 3/31

♦ G 線形空間のテンソル積

1. 線形空間のテンソル積　一般論
2. 線形写像のテンソル積
3. テンソル空間の基底
4. 多重テンソル積
5. 有限次元線形空間のテンソル積
6. 線形写像のテンソル積の性質, Kronecker 積
7. 内積空間のテンソル積

– 隔週日曜全 3 回 13:30–17:30
– 1/14, 1/28, 2/11

♦ ED Hilbert 空間上の線形作用素の基礎理論

1. 最低限の基礎知識
2. Hilbert 空間上の有界線形作用素の一般論
3. コンパクト作用素ネットの収束と一般添え字の級数

– 隔週日曜全 3 回 13:30–17:30
– 3/3, 3/17, 3/31

♦ MA Banach*代数の表現論その 2

作用素環や $C*$ 代数。解析学や幾何学などのより発展的な問題に取り組むためには表現論の知識は不可欠である。数学工房の講座に度々形を変えては、表現論に関係するテーマが現れるのはそういう理由です。今学期は、一般論の核心である正線形形式と巡回表現の関係を取り扱います。

0. 準備
1. Banach*代数の正線形形式と巡回表現
2. Banach*代数の既約表現の空間と既約表現の存在
3. Banach*代数の C^* ノルムと包絡 C^* 代数

– 隔週土曜全 3 回 13:30–17:30
– 3/10, 3/24, 4/7

♦ MB 完全正写像と完全有界写像

先学期の作用素空間、作用素系上の完全有界、完全正写像の初等的な理論を受けて、G.N.S 表現の一般化である、Steinspring の定理までを取り扱う。次学期は K 理論の概略を予定している。

1. Shur product から作られる乗法子の完全正写像の特徴付け
2. 様々な完全正写像
3. Steinspring の Dilation Theorem

– 隔週土曜全 3 回 13:30–17:30
– 1/20, 2/3, 2/17

講座料について

各講座、税込￥32,000(学割￥25,000）です。
オンラインの場合　￥25,000（ただしオンライン受講可能な場合）途中参加の場合、
・3 回講座は、1、2 回目¥ 12,000(学割￥9,000)、3 回目¥ 10,000(学割 ¥ 9,000) です。
・6 回講座は、1 回目¥ 6,500(学割 ¥ 6,000)、2 回目以降¥ 5,500/回 (学割 ¥ 4,000/回）です。
・オンラインの場合は、各回¥ 9,000 です。

講座、研究会等に御参加いただくには今年度の数学工房の年会費が払込み済みであることが必要です。

・銀行口座: 三井住友銀行 清瀬支店 普通預金口座番号 4585253 数学工房 桑野耕一
・郵便振替: 00150-9-686515 数学工房

会員からのメッセージ

数学工房会員の逸見昌之と申します。私は普段、統計科学の研究を仕事としていますが、数年前から、スコットランドのセントアンドリュース大学の人と共同研究していることを桑野先生にお話ししたところ、何か関係することを会報に書いてほしいと依頼を受けました。そこで、この機会に、以前から気になっていた、ジェームス・グレゴリーという数学者について書かせていただこうと思います。

スコットランドは、イギリスの北に位置する、北海道とほぼ同じ面積の地域ですが、かつては 1 つの国として、学術、文化、産業など様々な面で西洋史に大きな影響を及ぼしてきました。日本とも縁が深く、例えば幕末から明治にかけて、日本の近代化に大きく貢献したトーマス・ブレイク・グラバーはスコットランド出身で、グラバーがイギリスへの密留学を手助けした幕末の志士たちの何人かは、グラバーの故郷であるアバディーンという街でも学んでいます。セントアンドリュースは、スコットランドの首都であるエジンバラから、北へ電車とバスを乗り継いで約 1 時間半から 2 時間の場所にある、海に面した小さな田舎町です。ここはゴルフ発祥の地として有名なので、セントアンドリュースと言うと、多くの人が思い浮かべるのはゴルフかも知れませんが、それ以前に、古くから大学町として発展してきた歴史があります。実際、セントアンドリュース大学は、1413 年に設立されたスコットランド最古の大学で、イギリス全体でも、オックスフォード大学、ケンブリッジ大学に次いで 3 番目に古い大学です。ちなみに、スコットランドではこの後すぐ、グラスゴー大学 (1451 年)、アバディーン大学 (1495 年)、エジンバラ大学 (1583 年) が設立されましたが、イングランドでは 3 番目の大学が設立されたのが 1800 年代なので、スコットランドは教育先進国であり、そのことも、スコットランドから多くの偉人が生まれた背景にあるのかも知れません。

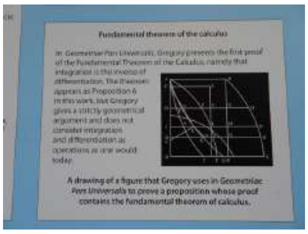
セントアンドリュース大学 旧図書館

前置きがやや長くなってしまいましたが、ここから本題に入ります。ジェームス・グレゴリーは、1668 年にチャールズ 2 世がセントアンドリュース大学に設立した、王立数学教授 (Regius Professor of Mathematics) に最初に任命された数学者で、数学以外にも、グレゴリー式反射望遠鏡の原理を考案したり、グリニッジ子午線が確立する約 200 年も前に、世界で初めて子午線を引いたりもしています。私が最初にセントアンドリュース大学を訪れた際、共同研究者の先生に、物理学科の一画にあるジェームス・グレゴリーの業績紹介コーナーに案内していただきましたが、そこには、物理学や天文学に関する業績の他に、数学、特に微積分に関する業績がかなりのスペースを割いて紹介されていました。私は、逆正接関数 (arctan) の冪級数展開にグレゴリー級数という名前が付いていることは知っていましたが、そのグレゴリーが、微積分の創始者の 1 人であると言わんばかりのこんなにもの業績を残していることは全く知りませんでしたので、興味をそそられて、展示解説をじっくり見入ってしまいました。ここで特に大きく取り上げられていたのは、テイラー展開と微積分学の基本定理に関する業績ですが、ずっと気になっていたので、今回この記事を書くのを機に、どういう経緯があるのか調べてみました。

グレゴリーは、当時、出版関係の仕事をしていたジョン・コリンズという人と親しく手紙のやり取りをしていましたが、1671 年の手紙に、上記の arctan を含む 7 つの関数 (tan, sec など) に対する冪級数展開を記しました。そこには導出過程は記されていませんでしたが、それより少し前に別の人がグレゴリーに宛てた手紙の裏に、グレゴリーがそれらの関数に対する高階微分の計算を記し、その結果のほとんどは、冪級数展開の係数に対応していました。このことから、グレゴリーは、ブルック・テイラーが 1715 年に導入する 40 年以上も前に、テイラー展開の考え方を持っていたと推察されています。ちなみに、アイザック・ニュートンもほぼ同時期に微積分に関する仕事をしていますが、1670 年の暮れに、ニュートンとも交流のあったコリンズがグレゴリーに、ニュートンによる $\sin x$, $\cos x$, $\sin^{-1} x$, $x \cot x$ の冪級数展開の結果を送り、ニュートンは、任意の関数の冪級数展開が可能な普遍的な方法を有していることを伝えました。その後、グレゴリーは自分自身でも冪級数展開の方法を考え、上記の 7 つの関数の冪級数展開

の結果をコリンズに送ったわけですが、ニュートンによる方法を再発見したに過ぎないと思い込み、自分の結果は出版せずに、ニュートンが出版するのを待とうと考えました。実は、ニュートンによる普遍的な方法というのは、この時点では二項展開を使った複雑な方法で、ニュートン自身がテイラー展開の着想に至ったのは 1691 年頃と言われています。

グレゴリーは、微分を接線 (tangent) の方法、積分を求積 (quadrature) の方法として捉え、円や双曲線 (で囲まれた領域) などの面積を求める過程で関数の冪級数展開を扱いましたが、1668 年に出版された「Geometriae pars universalis」という本に、微分と積分が互いに逆の関係にあることを定理として述べて、その証明を与えました。これは幾何学的な言葉によるものですが、出版された形で初めて微積分学の基本定理とその証明を述べたものと考えられています。ちなみに、ニュートンもこの頃には微積分の考え方を有しており、またニュートンが微積分に関する結果を公表するのはずっと後なので、グレゴリーとニュートンは、ほぼ同時期に独立に、微積分の基礎を構築したと推察されています。



微積分学の基本定理の展示パネル

グレゴリーは上記のような仕事をする中で、収束の概念の重要性を認識し、級数の収束と発散を区別したり、関数を (当時の水準で) 明確に定義したりするなど、議論を精密に行うことにも気を配っていましたが、グレゴリーの一連の仕事は長い間、日の目を見ませんでした。しかしながら、ごく最近になって、セントアンドリュース大学の図書館からグレゴリーの未発表のノートや余白にアイデアを記した手紙などが見つかり、1939 年に「James Gregory Tercentenary Memorial Volume」(H.W.Turnbull 編) という本が出版されたのを 1 つのきっかけとして、グレゴリーが再評価されるようになりました。グレゴリーは、中世のしきたりが残るセントアンドリュース大学ではカレッジへの所属が認められず、図書館の上の部屋で研究をしていましたが、1674 年にエジンバラ大学の教授となってからは環境が良くなり、アクティブに研究を続けました。しかしながらそれは長くは続かず、約 1 年後、学生に木星の衛星を見せている最中に脳卒中となり、その数日後に 37 歳の若さで亡くなってしまいました。グレゴリーは、その後の微積分の発展を目にすることはできませんでしたが、もし、もっと長く生きて、自分の研究の出版もしていれば、ニュートンやライプニッツと並んで、微積分の創始者の 1 人として広く認知されていたかも知れません。

図書館でのジェームス・グレゴリー

入門　桑野道場　（第53回）

//記　桑野道場師範代　半田伊久太//

前回の問題

1. 実数列 $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ と $\gamma \in \mathbb{R}$ が与えられたとき以下は同値である.
   (a) $\gamma = \overline{\lim}_n \varphi(n)$
   (b) • 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\gamma + \varepsilon < \varphi(n)$ を満たす正整数 n は高々有限個.
       • $\theta(n) \to \gamma (n \to \infty)$ となる φ の部分列 $\theta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が存在する.
   (c) $\mathrm{Acc}(\varphi)$ を φ の集積点全体の集合するとき，$\gamma = \sup(\mathrm{Acc}(\varphi))$ である.
2. 実数列 $\varphi, \psi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ は $\varphi(n) \geq 0$ かつ $\psi(n) \geq 0\,(n \in \mathbb{N})$ を満たすとき，以下を示せ.

(a) $\underline{\lim}_n \varphi(n)\,\underline{\lim}_n \psi(n) \leq \underline{\lim}_n(\varphi(n)\psi(n)) \leq \underline{\lim}_n \varphi(n)\,\overline{\lim}_n \psi(n)$
$\leq \overline{\lim}_n(\varphi(n)\psi(n)) \leq \overline{\lim}_n \varphi(n)\,\overline{\lim}_n \psi(n)$

(b) $\gamma := \lim_{n\to\infty}\varphi(n) \in \mathbb{R}$ が存在するとき
$\overline{\lim}_n(\varphi(n)\psi(n)) = \gamma\,\overline{\lim}_n \psi(n) = \lim_n \varphi(n)\,\overline{\lim}_n \psi(n)$

ただし，(a)，(b) において $0\cdot+\infty$ 及び $+\infty\cdot 0$ の形のものは除く．

注意

$\gamma \in \mathrm{Acc}(\varphi) \Leftrightarrow$ 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\varphi^{-1}((\gamma-\varepsilon, \gamma+\varepsilon))$ は $\mathbb{N}$ の無限部分集合である．

解答

1. $\phi(n) := \sup_{\nu\geq n}\varphi(\nu)\,(n\in\mathbb{N})$ とする．

   - (a) $\Rightarrow$ (c) $\gamma \notin \mathrm{Acc}(\varphi)$ なら $\exists\varepsilon_0 > 0$ s.t. $\varphi^{-1}((\gamma-\varepsilon_0, \gamma+\varepsilon_0))$ は $\mathbb{N}$ の高々有限部分集合だから，$\exists n_0\in\mathbb{N}$ s.t. $\phi(n) \notin (\gamma-\varepsilon_0, \gamma+\varepsilon_0)\,(n\geq n_0)$．よって $\overline{\lim}\,\varphi(n) = \lim\phi(n) \neq \gamma$．対偶をとれば $\gamma\in\mathrm{Acc}(\varphi)$．今，$\beta(\gamma<\beta)$ をとると $\gamma+\varepsilon_0<\beta$ について $\exists n_0\in\mathbb{N}$ s.t. $\phi(n_0) < \gamma+\varepsilon_0$．これから $\gamma+\varepsilon_0 < \varphi(n)$ なら $n\leq n_0$．
     よって $\beta\notin\mathrm{Acc}(\varphi)$．したがって $\gamma = \max\mathrm{Acc}(\varphi)$．
   - (c) $\Rightarrow$ (b) 1° $\varepsilon>0$ について $\gamma+\varepsilon<\beta$ とすると $\beta\notin\mathrm{Acc}(\varphi)$．
     よって $\varphi^{-1}((\gamma+\varepsilon,\infty))$ は高々有限集合．
     2° γ は集積点だから $\forall k\in\mathbb{N}$ に対して $\varphi^{-1}((\gamma-1/k, \gamma+1/k))$ は $\mathbb{N}$ の無限部分集合であることに注意すると，$\mathbb{N}$ の部分列 $\tau(1)<\tau(2)<\cdots<\tau(n)<\cdots$ $(\varphi(\tau(n))\in(\gamma-1/k,\gamma+1/k))$ が選べる．$\theta(n)=\varphi(\tau(n))\,(n\in\mathbb{N})$ とおくと θ は φ の部分列で作り方より $\theta(n)\to\gamma$．
   - (b) $\Rightarrow$ (a) 任意の $\varepsilon>0$ に対して $\varphi^{-1}([\gamma+\varepsilon,\infty))$ は高々有限集合だから，$\exists n_0\in\mathbb{N}$ s.t. $\varphi(n)<\gamma+\varepsilon\,(n\geq n_0)$．ゆえに $\phi(n)\leq\phi(n_0)<\gamma+\varepsilon\,(n\geq n_0)$．これから $\overline{\lim}\,\varphi(n) = \lim_{n\to\infty}\phi(n)\leq\gamma+\varepsilon$．$\varepsilon>0$ は任意だから $\overline{\lim}\,\varphi(n)\leq\gamma$．
     一方，$\theta(n)\leq\phi(\tau(n))\leq\phi(n)\,(\forall n\in\mathbb{N})$．
     これより $\gamma=\lim_{n\to\infty}\theta(n)\leq\lim_{n\to\infty}\phi(n)\leq\gamma$．よって $\gamma=\overline{\lim}\,\varphi(n)$．

2. (a)
   - $\overline{\lim}(\varphi(n)\psi(n)) \leq \overline{\lim}\,\varphi(n)\,\overline{\lim}\,\psi(n)$ を示す．
     任意の $n\in\mathbb{N}$ をとり固定する．$\mu\geq n \Rightarrow \varphi(\mu)\psi(\mu)\leq\sup_{\nu\geq n}\varphi(n)\cdot\sup_{\nu\geq n}\psi(n)$．
     これより $\sup_{\nu\geq n}(\varphi(\nu)\psi(\nu))\leq\sup_{\nu\geq n}\varphi(n)\cdot\sup_{\nu\geq n}\psi(\nu)$．
     $n\to\infty$ として $\overline{\lim}(\varphi(n)\psi(n))\leq\overline{\lim}\,\varphi(n)\,\overline{\lim}\,\psi(n)$ を得る．
   - $\underline{\lim}\,\varphi(n)\,\overline{\lim}\,\psi(n)\leq\overline{\lim}(\varphi(n)\psi(n))$ を示す．
     任意の $n\in\mathbb{N}$ をとり固定する．$\mu\geq n$ のとき，
     $\varphi(\mu)\psi(\mu)\leq\sup_{\nu\geq n}(\varphi(\nu)\psi(\nu)) \Rightarrow (\inf_{\nu\geq n}\varphi(\nu))\psi(\mu)\leq\sup_{\nu\geq n}(\varphi(\nu)\psi(\nu))$．
     これより $(\inf_{\nu\geq n}\varphi(\nu))(\sup_{\nu\geq n}\psi(\nu))\leq\sup_{\nu\geq n}(\varphi(\nu)\psi(\nu))$．
     よって $\underline{\lim}\,\varphi(n)\,\overline{\lim}\,\psi(n)\leq\overline{\lim}(\varphi(n)\psi(n))$．
   - その他の場合も同様にできる．

   (b) $\gamma=\lim\varphi(n)=\underline{\lim}\,\varphi(n)=\overline{\lim}\,\varphi(n)$ だから 2.(a) より，
   $\gamma\,\overline{\lim}\,\psi(n)=\underline{\lim}\,\varphi(n)\,\overline{\lim}\,\psi(n)\leq\overline{\lim}(\varphi(n)\psi(n))\leq\overline{\lim}\,\varphi(n)\,\overline{\lim}\,\psi(n)=\gamma\,\overline{\lim}\,\psi(n)$．
   以上により $\overline{\lim}(\varphi(n)\psi(n))=\gamma\,\overline{\lim}\,\psi(n)$．

今回の問題

1. (a) 数直線 $\mathbb{R}$ 内の閉区間 [0,1] は完備であることを示せ．

(b) 数直線 $\mathbb{R}$ 内の開区間 (0,1) は完備でないことを示せ.

ここで数直線 $\mathbb{R}$ の部分集合 A が完備であるとは，A 上の任意の Cauchy 列が A の点に収束するときを言う．また数直線 $\mathbb{R}$ が完備であることは既知とする.

2. S を複素平面 $\mathbb{C}$ の有界集合，$\mathcal{B}$ を複素平面 $\mathbb{C}$ の閉円板全体の集合とする.

このとき $\bigcap\{B \in \mathcal{B} \mid S \subset B\}$ は S の凸閉包である，すなわち S を含む最小の閉凸集合である．このことを示せ.

問題について一言

問題 1. は 2023 年秋学期の IA で，問題 2. は 2023 年秋学期 MB で扱われました.
解答をお待ちしております.

宛先と締切

宛先　kuwanodojo@googlegroups.com

締切　2024 年 4 月 30 日（火)

(郵送される場合は数学工房オフィスまでお願いいたします)

数学工房　2024 年 3 月 20 日発行
発行人　桑野耕一
編集人　増田卓、坂口尚文、半田伊久太
連絡先
オフィス電話：042-495-6632
数学工房連絡用携帯：080-6576-2691
e-mail：sugakukobo@w5.dion.ne.jp
e-mail：monteverdi2007@ezweb.ne.jp
公式ホームページ
http://www.sugakukobo.com/
数学工房教室
〒 170-0003
東京都豊島区駒込 1-40-4
全国蕎麦製粉会館 2F　202・203
数学工房オフィス
〒 204-0023
東京都清瀬市竹丘 1-17-26-401