Math.
No. 144
www.sugakukobo.com

会報 2024 年 8 月
数学工房

2024 年 夏 巻 頭 言

「その作家の本質は最初の作品と最後の作品に凝縮している。」作曲家で指揮者の Boulez が、かつて、Columbia の 20 世紀音楽のシリーズだったか、それとも Wergo のシリーズか一枚の LP に Mahler の嘆きの歌と 交響曲第 10 番を組で収録したときの Boulez 自身によるコメントだったと思います。

それに倣って数学工房の本質を表わすモットーを挙げると「数学を本当に自分のものとして学びたい、心からの喜びとして、一生付き合っていきたい人のために、個別の数学の知識より直面する数学的な問題を理解する能力を対話により涵養する。」(数学工房の前身となる市民講座「数学落ちこぼれセミナー」のモットーから。) これは数学工房の前身となる市民講座「数学落ちこぼれセミナー」のモットーです。「審美眼を養うことなしに、いかに努力し学んでも真の理解に到達することは難しい。」(2023 年 11 月の会報巻頭言で現代解析学の基礎として、そして数学の審美眼を養う材料としての Fourier 解析の図書を紹介したときの標語)

■ 古来退き戦は難しいと言われています。

来年、駒込教室を閉じるといったものの、いろいろな思いが浮かんで、数学工房の自分なりの総括ですらなかなかままなりません。ましてや教室を具体的に閉じる段取りは。教室を物理的に閉鎖するのは備品の処分等の面倒はありますが、それは淡々とやればよいことでたいしたことではありません。今度は、開講中の講座をどこで止めるかということを同時に考えなくてはならない。今までのやり方では難しい理由です。ある程度はオンライン移行できると思いますが、教室のようには、自在にとはいきそうにもありません。教室という表現の場があればこそ容易にイメージできたことが難しくなって思案する今日この頃です。

■ 数学のコミュニティとしての数学工房

数学工房もある意味で音楽と同じく広義の表現活動ですから、少なくとも私自身の活動の終わらせ方はけじめをつけたいと思っています。そのようなこともあり、駒込の数学工房の出発点に戻って会報バックナンバーなどを眺めてすっかり忘れていた日々を思い出しました。2005 年ごろだと思いますが、数学工房がサイエンティスト社の研修部門から独立したときに、それまで会社任せだった事務、広報、会報などをどうしようかという問題が起きましたが熱心な会員有志の協力により次のような自主活動グループができて、当時教室があったお茶の水界隈で活発に活動して、数学工房を支えてくれたのです。会報の編集、HP の作成、懇親会、座談会、説明会等の企画支援を担う運営グループ、講義ノートを作り会員が読めるようにするノート編集、TEX 化グループ、講義の復習稽古の自主セミナーを企画する演習グループ等々。さらに現在 2 つある研究会の前身である応用解析を考える会もこのころ立ち上がりました。2006 年サイエンティスト社社屋閉鎖に伴い新しい移転先を探すことになり現在の駒込の地に移りました。新しい教室探しから備品、インターネット環境の整備、講座の説明会まで会員有志の多大な助けがあったことは言うまでもありません。何よりも新しい事に挑戦するという熱気がありました。現在の数学工房の枠組みはこの時にできました。残念ながら様々な成り行きでほとんどの自主活動は衰退しましたが、現在でもその時以来会報編集と HP は今でも会員に担当していただいています。また研究会は 2 つあり作用素環研究会 (2012-) と応用数理の基礎数学の研究会 (2009-) はともに 15 年程存続しています。こうして歴史を思い返すと駒込の教室を核とした自由闊達な数学のコミュニティがあったことが最も貴重な財産かもしれません。思い

起こせば前身を含めれば 40 年を越す数学工房の歴史の中で、何度かそういう分岐点があり、成り行きで、最終的に核となる数学の学びのコンセプトとそれを実現する体系を作る事になった私がいつの間にか活動の中心にいたというのが本当のところですから、皆さんの中にそういうコミュニティの喪失を惜しむ方がいれば，必ず何らかのムーブメントが起きて新しいコンセプトの下で「数学工房」が再生するでしょう。もはや私のあずかり知らぬことですが、その様な日が来ることを楽しみにしています。

2024 年　夏　数学工房　桑野耕一

夏 学 期 講 座 案 内

2024 年 5 月〜8 月

2024 年夏学期講座は IC, EC, MA, および MB の 3 講座がオンラインでの受講が可能となっています。

<< 夏学期講座一覧 >>

略号	講座名	講座開始日	オンライン可
I.A	解析教程	5 月 12 日	
I.B	複素関数論	7 月 6 日	
I.C	局所コンパクト群の表現論	5 月 12 日	○
E.C	可換局所コンパクト群上の解析学 I	7 月 7 日	○
E.D	続 Hilbert 空間上の作用素	6 月 30 日	
G	抽象線型代数	5 月 19 日	
M.A	続 Banach*-代数の表現論	8 月 10 日	○
M.B	K 理論と作用素環	5 月 18 日	○

◆ I.A 解析教程　微積分の基本定理、級数、関数項の級数

＜ 1 ＞ 連続函数の積分と微積分の基本定理
＜ 2 ＞ 級数の基礎理論
＜ 3 ＞ 関数項の級数
　5/12 より隔週 3 回 (5/12, 5/26, 6/9)

◆ I.B　 複素関数論　続 Cauchy 理論の基本的な応用、有理型函数

＜ 1 ＞ 導関数の Cauchy 評価と Liouville の定理
(1) 様々な Cauchy 評価
(2) Gutzmer 公式と最大値原理
(3) Liouville の定理
(4) 代数学の基本定理
＜ 2 ＞ 特異点
(1) 孤立特異点、極
(2) 極の周りの展開
(3) 真性特異点と Casorati-Weierstrass の定理
＜ 3 ＞ 有理型函数
(1) 有理型函数の概念
(2) 有理型函数の代数
　7/6 より隔週 3 回 (7/6, 7/20, 8/3)

◆ I.C　 局所コンパクト群の表現論、帯球函数の Fourier 変換　オンライン可

(1) 帯球関数とクラス 1 表現の補遺
(2) 帯球関数の Fourier 変換
　5/12 より変則日程 5 回 (5/12, 5/26, 6/9, 6/30, 7/14)

◆ E.C　 可換局所コンパクト群上の解析学 I　オンライン可

(1) 位相群の一般論概略
(2) 局所コンパクト群
(3) 局所コンパクト群上の測度

(4) 関数解析からの補遺
7/7 より隔週 3 回 (7/7, 7/21, 8/4)

◆ E.D　続 Hilbert 空間上の作用素

＜ 0 ＞ 前学期のまとめ
＜ 1 ＞ 部分等距離写像と極分解
＜ 2 ＞ 補遺　強作用素位相と弱作用素位相
＜ 3 ＞ Banach 代数のスペクトル理論から
＜ 4 ＞ コンパクト作用素
6/30 より隔週 3 回 (6/30, 7/14, 7/28)

◆ G　抽象線型代数（標準形）

(1) 準備　行列表現、行列式、固有値、固有空間、最小多項式
(2) 線型変換の分解
(3) 最小多項式による 1 の分解
(4) Jordan 標準形
5/19 より隔週 3 回 (5/19, 6/2, 6/16)

◆ M.A　続 Banach*-代数の表現論　オンライン可

＜ 1 ＞　Banach*-代数の既約表現の幾何学的定式化
(1) 既約表現の幾何学的把握
(2) 既約表現の存在
＜ 2 ＞　Banach*-代数の包絡 C^*-代数
(1) Banach*-代数の C^* ノルム
(2) 包絡 C^* 代数の構成
(3) Banach*-代数の表現から誘導される C^*-代数の表現

集中講座 (8/10, 8/11)

◆ M.B　K 理論と作用素環

(1) 可換半群と Grothendieck 群
(2) C^*-代数上の正射影束の同値類の半群と Grothendieck 群
(3) K_0 群
(4) AF 代数
(5) AF 代数の K 理論
(6) K_1
5/18 より隔週 3 回 (5/18, 6/1, 6/15)

[料金]
通常講座
一括前納 ￥32,000（学割￥25,000）
各回払い 3 回のセミナー　1、2 回目￥12,000（学割￥9,000）　3 回目￥10,000（学割￥9,000）
6 回のセミナー　1 回目￥6,500（学割￥6,000）
2 回目以降￥5,500（学割￥4,000）
オンライン受講
一括前納 ￥25,000
各回払い ￥9,000/回
集中セミナー
2 日 ￥18000　1 日　￥12000　オンライン ￥15000

会　員　か　ら　の　メ　ッ　セ　ー　ジ

■　数学と物理学、および概念と実在の関係性に関する考察（原田雅樹）

数学とは何か。また、それを駆使する物理学とは何か。ピュタゴラス主義やプラトン主義が考えるように、数学は世界の本質、すなわちイデアに関わるもの、ないしイデアに接近するための道具なのであろうか。この見方は、近代科学を誘発、牽引した。ケプラーは、惑星運動を世界の奏でる音楽と捉え、ガリレイは、世界が数学という言葉で書かれていると考えた。ニュートンは、時間と空間を物理的事象の生ずる絶対的な器、神の感覚器官と捉えつつ、数学を用いて地上の運動と天界の運動を統一し、それとともに、運動論的な視点から微積分を誕生せしめた。ライプニッツは、数学概念を明晰判明なものに限るとしたデカルト主義、時間と空間を物理的事象の枠組みを考えるニュートンに対抗しつつ、無限小なる曖昧な概念を取り入れた関数論的な視点から微積分を誕生せしめた。また、彼は、複雑な

概念を単純な概念から計算によって構成しようとする「普遍数学」を掲げた。哲学者カントは、ニュートン的な経験論的かつ数学的な力学とライプニッツ的な観念論を統合しつつ、数学の自然現象への適用という問題から人間の思考の構造を捉え直そうと考えた。

19 世紀半ばの数学者リーマンの関数論や幾何学についての様々な大きな業績の後、ワイエルシュトラスやデデキント、カントールらによって、数学は厳密化され、集合論の上に基礎付けられるようになり、現代代数学や現代解析学の土台が築かれ、その上に数論や幾何学も築かれるようになっていった。20 世紀に入ると、関数解析の分野で、関数の集合にユークリッド空間の構造を入れるヒルベルト空間論が生みだされる。

20 世紀初め、物理学において、時間と空間の枠組みに対する見方を大きく変えた相対性理論と、物理的実体性についての見方を大きく変えた量子力学が誕生する。量子力学において物理量は、可換な実数によってではなく、非可換な作用素として記述されるようになる。その見方によれば、数の変化しない粒子が空間の中の点に位置づけられ、時間と共にそれが軌道を描いて運動していくという実在性をア・プリオリに措定することができなくなった。量子力学の重ね合わせの原理から導出される量子もつれという現象、古典的な粒子に与えるような実在性を破綻させるような現象も明確になった。

量子力学や場の量子論に触発され、1930 年代、ヒルベルト空間上の作用素の集合に環という代数構造を入れた作用素環論がフォン・ノイマンによって生みだされた。20 世紀半ばを過ぎたころから、量子統計力学に作用素環論を適用することが試みられていたが、世紀末に A. コンヌは、数論に重要な役割を果たすリーマンの ζ 関数と統計力学のカノニカル分布の間にある形式的類似性に注目し、作用素環論を数論に適用することを考えた。

他方、幾何学的空間の構造をその上の関数の集合のなす可換な代数構造で捉えようとするリーマン=ロッホの定理を一般化したアティヤ=シンガーの指数定理は、幾何学的空間の局所性と大域性の双対性を顕わにする。代数構造によって幾何学的空間を捉えようとする考え方はまさに場の理論の幾何学の考え方と言ってもよい。コンヌは、この代数を非可換化し、アティヤ=シンガーの指数定理を非可換化ないし量子化し、それを非可換微分幾何学の重要な基礎づけとするのである。ここでは、空間の局所性の意味は新たなコホモロジー、サイクリック・コホモロジーのド・ラム・コホモロジーとのアナロジーを通して拡張、再構成されている。この意味で、コンヌの非可換微分幾何学は、場の量子論の幾何学としての数理物理学と言えるのではないだろうか。たとえ、現代の場の量子論に基づいた素粒子論の標準模型を、非可換微分幾何学によって再構成することに成功していないとしても。

写真　原田雅樹さん

2024 年 4 月に東京大学出版会から『量子と非可換のエピステモロジー－数学と物理学の概念と実在』を上梓させていただいた（東京大学出版会のホームページから試し読みができます）。本書では、特に〈量子〉と〈非可換〉という概念をめぐりながら、場の量子論と非可換幾何学の概念構成を分析し、数学と物理学の関係、そして概念と実在の関係、またそこにおける直観の機能を哲学的に考察した。そこでは、第 2 次世界大戦中にナチスの銃弾に倒れたフランス人の数理哲学者 J. カヴァイエスの導入した〈概念の哲学〉を導きの糸とした。彼は、概念の構造と、その歴史における自律運動を強調する。本書では、非可換幾何学において、数学のさまざまな領域、すなわち数論、幾何学、代数学、解析学、数理物理学が干渉しあいながら数学概念が生成することを示した。特に、数的、幾何学的、物理的な〈対象〉が、代数的、解析的〈操作〉によっ

て媒介されながら、再構成される。そして、数学概念の生成の中で、〈分析・解析〉と呼ばれる抽象化の過程と〈総合〉と呼ばれる具体化の過程が同時に生じていることが示される。

入門桑野道場（第 54 回）

/// 記　桑野道場師範代　半田伊久太 ///

前回の問題

1. (a) 数直線 $\mathbb{R}$ 内の閉区間 [0,1] は完備であることを示せ.
   (b) 数直線 $\mathbb{R}$ 内の開区間 (0,1) は完備でないことを示せ.
   ここで数直線 $\mathbb{R}$ の部分集合 A が完備であるとは，A 上の任意の Cauchy 列が A の点に収束するときを言う．また数直線 $\mathbb{R}$ が完備であることは既知とする.
2. S を複素平面 $\mathbb{C}$ の有界集合，$\mathcal{B}$ を複素平面 $\mathbb{C}$ の閉円板全体の集合とする.
   このとき $\bigcap\{B \in \mathcal{B} \,|\, S \subset B\}$ は S の凸閉包である，すなわち S を含む最小の閉凸集合である．このことを示せ.

解答

1. (a) $\varphi : \mathbb{N} \to [0,1]$ を任意の Cauchy 列とする.
   $\mathbb{R}$ は完備なので $\exists a \in \mathbb{R}$ s.t. $\lim_{n\to\infty} \varphi(n) = a$.
   $0 \le \varphi(n) \le 1 (\forall n \in \mathbb{N})$ より $0 \le a \le 1$．すなわち $a \in [0,1]$．以上より $[0,1]$ は完備.
   (b) $\varphi(n) := 1/2n (n \in \mathbb{N})$ とすると $\varphi : \mathbb{N} \to (0,1)$ である．$\varphi(n) \to 0\,(n \to \infty)$.
   すなわち φ は収束列．よって φ は Cauchy 列である．ところが $0 \notin (0,1)$.
   したがって $(0,1)$ は完備でない.
2. $\hat{S} := \bigcap\{B \in \mathcal{B} \,|\, S \subset B\}$ とする．$\hat{S}$ が compact convex で S $\subset \hat{S}$ であることは明らか.
   $\hat{S} = \overline{\mathrm{co}}(S)$ であることを示す．ここで $\overline{\mathrm{co}}(S)$ は S の 閉凸包を表す.
   定義より $\overline{\mathrm{co}}(S) \subset \hat{S}$ は自明だから，$\overline{\mathrm{co}}(S) \subsetneqq \hat{S}$ と仮定しよう.
   $z_0 \in \hat{S} \setminus \overline{\mathrm{co}}(S)$ とするとき，$z_0 = 0$ かつ $r > 0$ が存在して
   $\overline{\mathrm{co}}(S) \subset H_r := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z > r\}$ としても一般性を失わない.
   任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $B_k := \{z \in \mathbb{C} : |z - (r+k)| < k\}$ とする.
   $\overline{\mathrm{co}}(S) \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k = H_r$ により $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ は $\overline{\mathrm{co}}(S)$ の開被覆.
   よって $k_0 \in \mathbb{N}$ が存在して $\overline{\mathrm{co}}(S) \subset B_{k_0}$．$S \subset \overline{\mathrm{co}}(S) \subset \overline{B_{k_0}}$ より $\hat{S} \subset \overline{B_{k_0}}$.
   よって $0 \in \overline{B_{k_0}}$ となり $\overline{B_{k_0}} \subset \overline{H_r}$ に矛盾する.

今回の問題

1. $I=(a,b)$ とする．$f:I\to\mathbb{R}$ が単射な連続関数である必要十分条件は f が狭義単調かつ連続であることであることを示せ．
2. 1. は f の連続性がないと成り立たない．
   $I=(a,b)$, $f:I\to\mathbb{R}$ が全単射で狭義単調でない例を挙げよ．

問題について一言

2024 年春学期の IA（解析教程）で扱われた問題です．解答をお待ちしております．

宛先と締切

宛先　kuwanodojo@googlegroups.com
締切　2024 年 10 月 31 日（木）
(郵送される場合は数学工房オフィスまでお願いいたします)

数学工房　2024 年 8 月 20 日発行
発行人　桑野耕一
編集人　増田卓、坂口尚文、半田伊久太

連絡先
オフィス電話：042-495-6632
数学工房連絡用携帯：080-6576-2691
連絡は極力 e-メールでお願いします。
e-mail：sugakukobo@w5.dion.ne.jp
e-mail：monteverdi2007@ezweb.ne.jp
公式ホームページ
http://www.sugakukobo.com/
数学工房教室
〒170-0003
東京都豊島区駒込 1-40-4
全国蕎麦製粉会館 2F　202・203

数学工房オフィス
〒204-0023
東京都清瀬市竹丘 1-17-26-401